

Tese de Doutorado

# Geometrodinâmica Quântica na Interpretação de Bohm-de Broglie

Eduardo Sergio Santini

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Rio de Janeiro, Maio de 2000

## Resumo

Nesta tese aplicamos a interpretação de Bohm-de Broglie à gravitação quântica canônica e mostramos que independentemente da regularização ou escolha de ordenamento na equação de Wheeler-Dewitt, o único efeito quântico relevante que não quebra a estrutura de espaço-tempo é uma mudança de assinatura de lorentziana para euclideana. Os outros efeitos quânticos ou são triviais ou quebram a estrutura de espaço-tempo. Construimos uma geometrodinâmica quântica na visão de Bohm-de Broglie que permite o estudo destas estruturas. Por exemplo, mostramos que qualquer solução real da equação de Wheeler-DeWitt gera uma geometria compatível com o limite de gravitação forte da Relatividade Geral e com o grupo de Carroll. Provamos que a geometrodinâmica quântica na interpretação de Bohm-de Broglie é sempre consistente para qualquer potencial quântico. Como um passo prévio e introdutório a nossa metodologia, estudamos a teoria quântica de campos no espaço-tempo de Minkowski na interpretação de Bohm-de Broglie e mostramos um exemplo concreto onde a invariância Lorentz é quebrada no nível de processos individuais.

# Abstract

In this thesis the Bohm-de Broglie interpretation of quantum mechanics is applied to canonical quantum gravity. It is shown that, irrespective of any regularization or choice of factor ordering of the Wheeler-DeWitt equation, the unique relevant quantum effect which does not break spacetime is the change of its signature from lorentzian to euclidean. The other quantum effects are either trivial or break the four-geometry of spacetime. A Bohm-de Broglie picture of a quantum geometrodynamics is constructed, which allows the investigation of these latter structures. For instance, it is shown that any real solution of the Wheeler-De Witt equation yields a generate four-geometry compatible with the strong gravity limit of General Relativity and the Carroll group. We prove that quantum geometrodynamics in the Bohm-de Broglie interpretation is consistent for any quantum potential. As a previous step to introduce our methodology, we study the quantum theory of fields in Minkowski spacetime in the Bohm-de Broglie interpretation and exhibit a concrete example where Lorentz invariance of individual events is broken.

## Dedicatoria

Odoardo Santini *in memoriam*

Ana María Martino de Santini

Juan José Santini

Agradeço ao povo do Brasil, que me recebeu de braços abertos e que é aquele que, na verdade, com o seu trabalho, privações e sacrifícios, paga a nossa pesquisa, fato que nunca devemos esquecer no nosso laboratório.

”...O que tenho para dizer à Universidade [...] ? Tenho que dizer que se pinte de negro, que se pinte de mulato, não só entre os alunos, mas também entre os professores, que se pinte de operários e de camponeses, que se pinte de povo, porque a Universidade não é patrimônio de ninguém e pertence ao povo...”

**Dr. Ernesto Che Guevara**

## Agradecimentos

Agradeço a Nelson Pinto-Neto, orientador, mestre e amigo, pela orientação desta tese e pelo ensino constante com a sua atitude na pesquisa. Agradeço ao grupo de cosmologia e gravitação do Lafex e ao pessoal do CBPF/CNPq em geral por estes quatro anos de pesquisa e permanente aprendizagem e pela bolsa que permitiu-me realizar este doutorado. Ao pessoal da secretaria do Lafex e da CFC (Myriam!) muito obrigado. "Eu só sei que não sei nada" mas aqui aprendi algumas coisas: "faz sempre a conta, não interessa de quem é o paper.." (Nelson). "..tudo o que vc vai falar ai no quadro tem que saber provar..." (Mário Novello). "...sem mulher não tem física nenhuma..." (Leite Lopes) que eu interpretei como "sem amor não tem coisa nenhuma". A todos eles muito obrigado. Muito obrigado a Helayel pela ajuda e infinita sensibilidade conosco os posgraduandos. Agradeço a minha família que sempre me apoiou, seja aqui, lá ou em qualquer parte. É a eles que dedico este trabalho. Aos meus **amigos e amigas** de sempre e de agora...muito obrigado!!!

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A Interpretação de Bohm-de Broglie</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Teoria de Campos na Interpretação de Bohm-de Broglie</b>	<b>14</b>
3.1	Teoria de campos parametrizada . . . . .	14
3.2	Teoria de campos parametrizadas na interpretação de Bohm-de Broglie . .	23
<b>4</b>	<b>Quântização Canônica da Gravitação</b>	<b>35</b>
4.1	Formalismo hamiltoniano clássico . . . . .	37
4.2	Quantização canônica . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Geometrodinâmica Quântica na Visão de Bohm-de Broglie</b>	<b>50</b>
5.1	A perspectiva de Hamilton-Jacobi . . . . .	50
5.2	A perspectiva hamiltoniana . . . . .	54
5.3	Consistência da teoria . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Cenários Possíveis</b>	<b>62</b>
6.1	A geometrodinâmica quântica gera uma 4-geometria não degenerada . . . .	62
6.1.1	O espaço tempo formado é hiperbólico ( $\epsilon = -1$ ) . . . . .	63
6.1.2	O espaço-tempo formado é euclideo ( $\epsilon = 1$ ) . . . . .	63
6.2	A geometrodinâmica quântica gera uma 4-geometria degenerada . . . . .	64
6.2.1	Soluções reais da equação de Wheeler-DeWitt . . . . .	64
6.2.2	Potenciais quânticos não locais . . . . .	65

<b>7</b>	<b>Discussão e Conclusões</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo de <math>\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\}</math> no caso da teoria de campos parametrizada</b>	<b>72</b>
<b>B</b>	<b>A quebra da invariância de Lorentz</b>	<b>74</b>
<b>C</b>	<b>Potencial quântico não local para um espaço-tempo esfericamente simétrico</b>	<b>80</b>



## Notações e convenções

- a) assinatura da métrica:  $(-, +, +, +)$
- b) índices gregos vão de 0 a 3 e os índices latinos de 1 a 3
- c) todas as deltas de Dirac que aparecem são 3-dimensionais. As deltas de Dirac derivadas são escritas sempre com a derivação com respeito ao primeiro argumento:

$$\delta_i(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(x, y) \quad (0.1)$$

$$\delta_i(y, x) \equiv \frac{\partial}{\partial y^i} \delta(y, x) \quad (0.2)$$

- d) derivada covariante 4-dimensional de  $A^\beta$ :

$$\nabla_\alpha A^\beta \equiv \partial_\alpha A^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta A^\nu \quad (0.3)$$

onde

$$\Gamma_{\alpha\nu}^\beta \equiv \frac{1}{2} g^{\beta\mu} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\alpha g_{\nu\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\nu}) \quad (0.4)$$

e  $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

- e) derivada covariante 3-dimensional de  $A^j$ :

$$D_i A^j \equiv \partial_i A^j + {}^3\Gamma_{ik}^j A^k \quad (0.5)$$

onde

$${}^3\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} h^{jl} (\partial_i h_{kl} + \partial_k h_{il} - \partial_l h_{ik}) \quad (0.6)$$

onde  $h_{ij}$  é a métrica 3-dimensional e  $h^{ij}$  sua inversa.

- f) curvatura 4-dimensional:

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu \equiv \nabla_\alpha \nabla_\beta A^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha A^\mu \quad (0.7)$$

- g) tensor de Ricci 4-dimensional:

$$R_{\nu\beta} = R_{\nu\alpha\beta}^\alpha \quad (0.8)$$

h) equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu} \quad (0.9)$$

onde  $\kappa = \frac{16\pi G}{c^4}$

i) curvatura 3-dimensional:

$${}^3R^i{}_{jkl}A^j \equiv D_kD_lA^i - D_lD_kA^i \quad (0.10)$$

sendo o tensor de Ricci 3-dimensional definido de forma análoga

j) simetrização:

$$A_{(ij)} \equiv \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) \quad (0.11)$$

# Lista de Figuras

# Capítulo 1

## Introdução

A mecânica quântica é aceita na comunidade científica mundial como sendo uma teoria universal e fundamental, aplicável a qualquer sistema físico, e da qual pode-se recuperar a física clássica. O Universo é, claro, um sistema físico válido: existe uma teoria, a Cosmologia Padrão, que é capaz de descrevê-lo em termos físicos, e fazer previsões que podem ser confirmadas ou refutadas pelas observações. De fato, as observações confirmam até agora o cenário cosmológico padrão. Admitindo-se então a universalidade da mecânica quântica, concluímos que o próprio Universo deva ser descrito pela teoria quântica, da qual poderíamos recuperar a Cosmologia Padrão. Mas, a interpretação de Copenhaguen da mecânica quântica [1, 2, 3]<sup>1</sup>, ensinada nos cursos de faculdade e utilizada pela maioria dos físicos de todas as áreas (em especial na apresentação de von Neumann), não pode ser utilizada numa teoria quântica da Cosmologia. Isto porque ela impõe a existência de um domínio clássico. Na formulação de von Neumann, por exemplo, a necessidade de um domínio clássico vem da forma como ela resolve o problema da medida (veja Ref. [4])

---

<sup>1</sup> Embora estes três autores tenham diferentes visões da teoria quântica, o primeiro deles enfatizando a indivisibilidade dos fenômenos quânticos, o segundo a noção de potencialidade e o terceiro o conceito de estados quânticos, para todos eles resulta crucial a existência de um domínio clássico. Esta é a razão de apresentar suas visões sob o mesmo nome ‘interpretação de Copenhaguen’.

para uma boa discussão deste ponto). Na medida impulsiva de um certo observável, a função de onda do sistema medido mais o aparelho macroscópico de medida divide-se em muitos ramos que praticamente não se superpõem (de modo a se obter uma boa medida), cada uma delas contendo o sistema observado num autoestado do observável medido, e o ponteiro do aparelho apontando para o respectivo autovalor. Porém, ao final da medida observamos somente um desses autovalores, e a medida é um processo robusto já que se repetimos o processo imediatamente depois, vamos obter o mesmo resultado. A função de onda parece colapsar, os outros ramos desaparecem. A interpretação de Copenhague assume que este colapso é real. Mas um colapso real não pode ser descrito por uma evolução unitária de Schrödinger. Por isso a interpretação de Copenhague deve assumir que existe um processo fundamental numa medida o qual deve-se produzir fora do mundo quântico, num domínio clássico. Claro que se agora desejamos quantizar todo o Universo, não existe lugar para um mundo clássico fora dele, e a interpretação de Copenhague não pode ser aplicada. Quer dizer que, ao insistir com a interpretação de Copenhague, deve-se assumir que a teoria quântica não é universal ou, no mínimo, tentar melhorá-la com conceitos adicionais. Uma possibilidade seria a de invocar o processo de descoerência [5]. De fato, a interação do sistema quântico observado com o seu ambiente produz uma diagonalização efetiva da matriz densidade reduzida, obtida do traço com respeito aos graus de liberdade irrelevantes. A descoerência pode explicar porque a divisão da função de onda é dada em termos dos estados do ponteiro, e porque não vemos superposições de objetos macroscópicos. Desta forma, as propriedades clássicas emergem da teoria quântica sem necessidade de serem assumidas. No contexto da gravitação quântica, a descoerência

também pode explicar o surgimento de uma geometria de fundo clássica num universo quântico [6]. De fato, esta é a primeira quantidade a se tornar clássica. Contudo, a descoerência ainda não é a resposta completa ao problema da medida [7, 8]. Ela não consegue explicar o colapso aparente da função de onda depois que acaba a medida, ou porque apenas um dos elementos da diagonal da matriz densidade sobrevive após termina o proceso de medida. A teoria é incapaz de explicar a existência de fatos, sua unicidade, em contraposição com a multiplicidade dos fenômenos possíveis. Ainda estão em progresso outros desenvolvimentos da teoria como por exemplo o de ‘historias consistentes’ [9], o qual ainda está incompleto. O importante papel desempenhado pelos observadores nestas descrições ainda não foi explicado [10], e portanto persiste o problema de como descrever um Universo quântico onde a geometria de fundo ainda não é clássica. Contudo, existem algumas soluções alternativas para este dilema cosmológico quântico os quais, junto com a descoerência, podem resolver o problema da medida mantendo a universalidade da teoria quântica. Podemos dizer que a evolução de Schrödinger é uma aproximação de uma teoria não linear mais fundamental que pode explicar o colapso [11, 12], ou que o colapso é efetivo mas não real, no sentido que os outros ramos desaparecem do observador mas continuam existindo. Nesta segunda categoria podemos citar a interpretação de Vários Mundos [13] e a interpretação de Bohm-de Broglie [14, 16]. Na primeira, todas as possibilidades na divisão da função de onda são realizadas. Em cada ramo existe um observador com o conhecimento do autovalor correspondente a este ramo, mas ele ou ela não está ciente dos outros observadores e das outras possibilidades, já que os ramos não interferem. Na ultima, é suposta a existência de uma partícula pontual no espaço

de configuração que descreve o sistema observado e o aparelho, independentemente de qualquer observação. Na divisão, esta partícula pontual vai ingressar num dos ramos (isto depende da posição inicial da partícula antes da medida, a qual é desconhecida), e os outros ramos estarão vazios. Pode-se mostrar [16] que as ondas vazias não podem interagir com outras partículas, nem com a partícula pontual que contem o aparelho. Portanto, nenhum observador pode detetar os outros ramos que estão vazios. De novo, temos um colapso efetivo mas não real (as ondas vazias continuam existindo), mas agora sem multiplicação de observadores. Estas interpretações podem, claro, ser utilizadas em cosmologia quântica. A evolução de Schrödinger é sempre válida, e não é necessário um domínio clássico fora do sistema observado.

Nesta tese vamos tratar da aplicação da interpretação de Bohm-de Broglie na cosmologia quântica [17, 18, 19, 20]. Desta forma, o objeto fundamental da gravitação quântica, a saber, a geometria das hipersuperfícies espaciais 3-dimensionais, supõe-se existir independentemente de qualquer observação ou medida, assim como também seus momentos canônicos conjugados, a curvatura extrínseca das hipersuperfícies espaciais. Sua evolução, indicada por algum parâmetro temporal, é ditada por uma evolução quântica diferente da clássica devido à presença do potencial quântico o qual surge de forma natural da equação de Wheeler-DeWitt. Esta interpretação tem sido aplicada a muitos modelos de minisuperespaço [17, 20, 21, 22, 23, 24], obtidos impondo homogeneidade às hipersuperfícies espaciais. Foram discutidas questões como o limite clássico, o problema das singularidades, o problema da constante cosmológica e o problema do tempo. Por exemplo, em alguns desses trabalhos foi mostrado que nos modelos com campos escalares ou

radiação, que são bem representativos do conteúdo de matéria no universo primordial, a singularidade pode claramente ser evitada por efeitos quânticos. Na descrição segundo a interpretação de Bohm-de Broglie, o potencial quântico resulta importante na vizinhança da singularidade clássica, produzindo uma força quântica repulsiva, compensando o campo gravitacional, evitando assim a singularidade e produzindo inflação. O limite clássico (definido pelo limite para o qual o potencial quântico resulta desprezível frente à energia clássica) para grandes fatores de escala são usualmente alcançados, mas para certos modelos com campo escalar ele depende do estado quântico e das condições iniciais. De fato, é possível ter universos clássicos pequenos e universos quânticos grandes [24]. Com respeito ao problema do tempo, foi mostrado que, para qualquer escolha da função lapso, a evolução quântica das hipersuperfícies homogêneas produz a mesma 4-geometria [20]. O que deve agora ser estudado é se este fato ainda é válido na teoria completa, onde não estamos restritos a hipersuperfícies espaciais homogêneas. A questão é: dada uma hipersuperfície inicial com condições iniciais consistentes, a evolução da 3-geometria inicial dada pela dinâmica quântica bohmiana vai produzir a mesma 4-geometria para qualquer escolha das funções lapso e deslocamento?. E se assim for, qual o tipo de estrutura espaço-temporal formada?. Sabemos que isto é verdade se a 3-geometria evolui seguindo a dinâmica da Teoria da Relatividade Geral clássica (TRG), produzindo uma 4-geometria não degenerada, mas isso pode ser falso no caso em que a evolução dinâmica seja a bohmiana. Nesta tese vamos estudar e responder esta questão em detalhe. A idéia é colocar a dinâmica quântica de Bohm em forma hamiltoniana para utilizar resultados poderosos que existem na literatura os quais dão a forma mais geral que um hamiltoniano



deve ter para formar uma 4-geometria não degenerada da evolução da 3-geometria inicial [25].

Nossa conclusão [26] é que a evolução Bohmiana das 3-geometrias resulta sempre consistente independentemente da escolha das funções lapso e deslocamento, mas somente para estados quânticos muito especiais esta evolução produzirá uma 4-geometria quântica não degenerada relevante, que deve ser euclideana. Em geral, a evolução bohmiana das 3-geometrias produzirá uma 4-geometria quântica degenerada onde estarão presentes campos de vetores especiais (os autovetores nulos da 4-geometria)<sup>2</sup>. Então, se impusermos que o espaço-tempo quântico seja uma variedade quadridimensional com uma 4-geometria não degenerada definida sobre ele, concluímos que deva ser euclideano. Chegamos a estas conclusões sem ter assumido nenhuma regularização e ordenamento na equação de Wheeler-DeWitt. Como sabemos, esta equação envolve a aplicação do produto de operadores locais sobre estados no mesmo ponto do espaço, o qual não está bem definido [28]. Portanto, precisamos regularizá-la para resolver o problema de ordenamento, e ter uma teoria livre de anomalias (para algumas propostas veja as referências [29, 30, 31]). As conclusões desta tese são completamente independentes destes problemas. Também, no caso geral onde temos 4-geometrias degeneradas, podemos obter uma imagem da estrutura quântica produzida pela dinâmica bohmiana, a qual não é um espaço-tempo no sentido explicado acima mas algo como as 4-geometrias degeneradas compatíveis com o grupo de Carroll [32].

Esta tese está organizada do seguinte modo: no próximo capítulo exporemos a inter-

---

<sup>2</sup>Por exemplo, a 4-geometria do espaço Newtoniano é degenerada [27], e o seu único autovetor nulo é a normal das hipersuperfícies de simultaneidade, o tempo. Como sabemos, esta estrutura não representa um espaço-tempo já que está quebrada em espaço absoluto mais tempo absoluto.

interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica, tanto para uma partícula não relativística quanto para a teoria quântica de campos em espaço-tempo plano. No capítulo 3 estudaremos algumas características desta interpretação no caso da teoria de campos mostrando resultados conceituais importantes, especialmente os concernentes à invariância relativística da teoria. Ao mesmo tempo, este capítulo serve como uma introdução à metodologia seguida no caso da gravitação quântica. No capítulo 4 exporemos a cosmologia quântica canônica e no seguinte aplicaremos a interpretação de Bohm-de Broglie a esta teoria. Nele construiremos a geometrodinâmica quântica na visão de Bohm-de Broglie mostrando que, independentemente da regularização e ordenamento da equação de Wheeler-DeWitt, a evolução bohmiana das 3-geometrias pode ser obtida a partir de um certo hamiltoniano, que resulta, claro, diferente do clássico. Isto será utilizado no capítulo 6 para obter os principais resultados desta tese, relativos aos possíveis cenários cosmológicos na era quântica, à possibilidade de obter 4-geometrias quânticas não-degeneradas e à descrição de outras estruturas quânticas diferentes. Discutimos também o limite clássico destas possibilidades. Encerramos com as conclusões, discussão e perspectivas para o futuro. No apêndice A calculamos explicitamente o colchete de Poisson relevante para o estudo da invariância relativística concernente ao capítulo 3. No apêndice B mostramos um exemplo específico de quebra de invariância de Lorentz e calculamos o seu respectivo potencial quântico. No apêndice C mostramos um exemplo concreto de um midi-superespaço que ilustra a discussão do capítulo 6.

## Capítulo 2

# A Interpretação de Bohm-de Broglie

Como vimos na introdução, a interpretação de Bohm-de Broglie, contrariamente à interpretação de Copenhagen, prescinde da existência de um mundo clássico fora do objeto quântico e portanto pode ser usada como interpretação da cosmologia quântica.

Mas existem outras razões para estudar esta interpretação, além da sua aplicabilidade à cosmologia quântica. De fato, historicamente esta interpretação surgiu para proporcionar uma descrição completa e causal de um fenômeno quântico, independentemente do ato de observação. Sabemos que nenhum experimento contradiz as previsões da formulação ortodoxa e que a concordância teoria-experimento se dá com grande precisão (como no caso da Eletrodinâmica Quântica) [33], Mas como a mecânica quântica ortodoxa prediz somente resultados de experimentos realizados com agregados estatísticos, ela não providencia uma descrição dos eventos individuais da experiência, que parecem acontecer ao acaso e dos quais são funções os fenômenos estatísticos. Resulta então um desafio construir uma teoria capaz de descrever os sistemas materiais individuais de forma causal, cada um deles seguindo sua lei de movimento, cujo comportamento em conjunto reproduza as previsões estatísticas da mecânica quântica. Assim, os registros no laboratório

poderiam ser explicados como resultado de uma sequência de processos bem definidos ocorridos em sistemas que possuem propriedades que existem independentemente do ato da observação. Um modo de fazer isto foi construído por Louis de Broglie e David Bohm. Além dos artigos originais e dos que se seguiram na literatura, já existe hoje o primeiro livro texto de mecânica quântica nesta interpretação [16].

Neste capítulo vamos expor as principais características da interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica, que serão úteis no nosso tratamento da gravitação quântica e teoria de campos nos capítulos seguintes. Mostraremos primeiro como esta interpretação se aplica ao caso de uma partícula descrita pela equação de Schrödinger e depois vamos obter, por analogia, a interpretação causal de uma teoria de campos no espaço-tempo plano.

Começemos com a interpretação de Bohm-de Broglie para a equação de Schrödinger de uma partícula. Na representação de coordenadas, para uma partícula não relativística cujo hamiltoniano é  $H = p^2/2m + V(x)$ , a equação de Schrödinger é

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] \Psi(x, t). \quad (2.1)$$

Podemos transformar esta equação diferencial sobre um campo complexo num par de equações diferenciais acopladas sobre campos reais, escrevendo  $\Psi = A \exp(iS/\hbar)$ , onde  $A$  e  $S$  são funções reais, e substituindo-a em (2.1). Obtemos as seguintes equações

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left( A^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Na interpretação de Copenhague, a Eq. (2.3) é uma equação de continuidade para a densidade de probabilidade  $A^2$  de encontrar a partícula na posição  $x$  e tempo  $t$ . Toda a informação física do sistema está contida em  $A^2$ , e a fase total  $S$  da função de onda é completamente irrelevante. Nesta interpretação nada é dito a respeito de  $S$  e sua equação de evolução (2.2). Mas suponhamos que o termo  $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}$  não esteja presente na equação (2.2). Então podemos interpretar (2.2) e (2.3) como equações para um conjunto estatístico de partículas clássicas submetidas ao potencial clássico  $V$  satisfazendo a equação de Hamilton-Jacobi (2.2), cuja densidade de probabilidade de distribuição no espaço,  $A^2$ , verifica a equação de continuidade (2.3).  $\nabla S(x, t)/m$  é o campo de velocidades  $v(x, t)$  do conjunto de partículas. Quando o termo  $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}$ , que chamaremos de potencial quântico, está presente, podemos ainda interpretar (2.2) como uma equação de Hamilton-Jacobi para o conjunto de partículas. Mas agora, as trajetórias não vão ser as clássicas, devido à presença do potencial quântico na (2.2).

A interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica esta baseada nas *duas* equações (2.2) e (2.3) do modo explicado acima, não só na última como a interpretação de Copenhague. O ponto de partida é que a posição  $x$  e o momento  $p$  estão sempre bem definidos, sendo a partícula guiada por um novo campo: o campo quântico. Este campo  $\Psi$  satisfaz a equação de Schrödinger (2.1) a qual é equivalente às duas equações reais (2.2) e (2.3). A equação (2.2) é interpretada como uma equação tipo Hamilton-Jacobi para a partícula quântica submetida a um potencial externo, o qual é a soma do potencial clássico com o novo potencial quântico:

$$Q \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}. \quad (2.4)$$

O efeito do campo  $\Psi$  sobre a trajetória da partícula se dá através do potencial quântico (2.4). Uma vez obtido  $\Psi$  ao resolver a equação de Schrödinger, podemos obter a trajetória da partícula,  $x(t)$ , integrando a equação diferencial  $p = m\dot{x} = \nabla S(x, t)$ , a qual é chamada de *relação guia* ou *relação de Bohm* (o ponto acima significa derivada temporal). Claro que vamos precisar conhecer a posição inicial da partícula para obter a trajetória não clássica  $x(t)$ , a partir desta equação diferencial. No entanto, nós não conhecemos a posição inicial da partícula pois não sabemos como medi-la sem perturbar o sistema (esta é a variável escondida da teoria). Para estar de acordo com todos os experimentos quânticos, é preciso postular que, para um conjunto estatístico de partículas no mesmo campo quântico  $\Psi$ , a densidade de probabilidade de distribuição das posições iniciais  $x_0$  é  $P(x_0, t_0) = A^2(x_0, t = t_0)$ . A equação (2.3) garante que  $P(x, t) = A^2(x, t)$  para todo tempo. Deste modo, as previsões estatísticas da teoria quântica na interpretação de Bohm-de Broglie são exatamente as mesmas que na interpretação de Copenhaguen.<sup>1</sup>

Resulta interessante notar que o potencial quântico  $Q$  depende só da forma de  $\Psi$ , não do seu valor absoluto, como vemos da Eq.(2.4). Este fato coloca em evidência o caráter não local e contextual do potencial quântico<sup>2</sup>. Esta é uma característica necessária pois as desigualdades de Bell, junto com os experimentos de Aspect, mostram que, em geral,

---

<sup>1</sup> Ja foi mostrado que sob situações caóticas típicas, dentro da interpretação de Bohm-de Broglie, uma distribuição de probabilidade  $P \neq A^2$  deve rapidamente convergir ao valor  $P = A^2$  [34, 35]. Neste caso, o postulado da probabilidade inicial não seria necessário, e poderíamos ter situações, em intervalos de tempo muito curtos, onde esta interpretação de Bohm-de Broglie modificada poderia diferir da interpretação de Copenhaguen.

<sup>2</sup>A não localidade de  $Q$  resulta evidente ao generalizarmos a interpretação causal para um sistema de muitas partículas.

uma teoria quântica deve ser ou não local ou não ontológica. Dado que a interpretação de Bohm-de Broglie é ontológica, então ela deve ser não local. O potencial quântico não local e contextual causa os efeitos a quânticos. Ele não tem paralelo na física clássica.

A função  $A$  desempenha um papel duplo na interpretação de Bohm-de Broglie: fornece o potencial quântico e também a densidade de probabilidade de distribuição das posições, mas este último papel é secundário. Se tivermos algum modelo no qual a noção de probabilidade não se aplica, poderíamos ainda assim obter informação utilizando as relações guia. Neste caso,  $A^2$  não precisa ser normalizável. A interpretação de Bohm-de Broglie não é *em essência*, uma interpretação probabilística. Resulta imediata sua aplicação a um sistema individual. O limite clássico pode se obter de uma forma muito simples. Só precisamos achar as condições segundo as quais  $Q = 0$ <sup>3</sup>. A questão de porque numa medida real nós observamos um colapso efetivo da função de onda é respondida notando que, numa medição, a função de onda se divide numa superposição de ramos que não se intersectam. Então a partícula (que na verdade representa o objeto observado mais o aparelho de medida macroscópico) vai entrar num destes ramos (em qual deles depende das condições iniciais) e será influenciada somente pelo potencial quântico que corresponde a este ramo particular, que é o unico não desprezível na região onde a partícula realmente está. Os outros ramos vazios continuam existindo, mas eles não tem influência sobre a partícula medida nem sobre qualquer outra [16]. Existe um colapso efetivo mas não real. A equação de Schrödinger é sempre valida. Não é necessario que exista um domínio clássico fora do sistema quântico para poder explicar o proceso de medida, nem é crucial

---

<sup>3</sup>Seria interessante estudar a conexão entre este limite clássico bohmiano e o fenômeno de descoerência. Até onde sabemos, não foi feito nenhum trabalho nesta direção, o qual poderia iluminar tanto a interpretação de Bohm-de Broglie quanto a compreensão do fenômeno da descoerência.

a existência de observadores já que esta interpretação é objetiva.

É possível aplicar um raciocínio similar no caso da teoria quântica de campos em espaço-tempo plano. Como exemplo, a equação de Schrödinger funcional para um campo quântico escalar é:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\phi, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ -\hbar^2 \frac{\delta^2}{\delta \phi^2} + (\nabla \phi)^2 + U(\phi) \right\} \Psi(\phi, t). \quad (2.5)$$

Escrevendo de novo o funcional de onda na forma polar  $\Psi = A \exp(iS/\hbar)$ , obtemos:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + (\nabla \phi)^2 + U(\phi) \right] + \mathcal{Q}(\phi) \right\} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \int d^3x \frac{\delta}{\delta \phi} \left( A^2 \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) = 0, \quad (2.7)$$

onde  $\mathcal{Q}(\phi) = -\hbar^2 \frac{1}{2A} \frac{\delta^2 A}{\delta \phi^2}$  é o correspondente potencial quântico (não regulado). A primeira equação é interpretada como uma equação de Hamilton-Jacobi que governa a evolução de certa configuração inicial de campo no tempo, a qual vai ser diferente da clássica devido a presença do potencial quântico. A relação guia será dada por:

$$\Pi_\phi = \dot{\phi} = \frac{\delta S}{\delta \phi}. \quad (2.8)$$

A segunda equação é a equação de continuidade para a densidade de probabilidade  $A^2[\phi(x), t_0]$  de que a configuração de campo inicial a  $t_0$  esteja dada por  $\phi(x)$ .

Um estudo detalhado da interpretação de Bohm-de Broglie na teoria quântica de campos pode ser encontrado na Ref. [36] para o caso da eletrodinâmica quântica.



## Capítulo 3

# Teoria de Campos na Interpretação de Bohm-de Broglie

Neste capítulo vamos estudar algumas características da interpretação de Bohm-de Broglie em teoria de campos. Além de encontrarmos resultados interessantes para a teoria de campos, a saber, a prova da sua consistência geral e a quebra da invariância relativística para processos individuais, a metodologia desenvolvida aqui servirá como introdução ao estudo da gravitação e cosmologia quânticas na interpretação de Bohm-de Broglie, nos capítulos seguintes.

### 3.1 Teoria de campos parametrizada

Uma característica essencial da geometrodinâmica é a existência dos vínculos super-hamiltoniano e super-momento, presentes, como sabemos, devido a invariância da TRG sob transformações gerais de coordenadas [37].

É possível encontrar (ou simular) uma situação parecida em sistemas mecânicos com finitos graus de liberdade e também em teoria de campos no espaço-tempo plano, por meio de um processo conhecido como *parametrização* [37] [38]. Isto vai permitir con-

struir a teoria de modo que os estados do campo estejam definidos numa hipersuperfície espacial geral. Deste modo, resulta manifesta a invariância relativística do formalismo hamiltoniano. Ademais, esta forma parametrizada de se escrever a ação de campos no espaço-tempo plano facilitará a implementação da interpretação de Bohm-de Broglie em gravitação quântica, onde a ação é parametrizada de início. De fato, a TRG já é uma teoria parametrizada e até agora revelou-se impossível deparametrizá-la em geral no sentido de separar os graus de liberdade dinâmicos (genuínos) dos redundantes (cinemáticos). Na TRG, estamos forçados a usar variáveis redundantes como coordenadas canônicas e por isso aparecem os vínculos.

Concretamente, seja um campo escalar  $\phi(X^\alpha)$  propagando-se num espaço-tempo plano de dimensão 4 com coordenadas minkowskianas  $X^\alpha \equiv (T, X^i)$ . Os índices gregos vão de 0 a 3 e os índices latinos de 1 a 3. Consideremos as coordenadas curvilíneas  $x^\beta = (t, x^i)$  e seja a transformação:

$$X^\alpha = X^\alpha(x^\beta) \quad (3.1)$$

Deixando  $t$  fixo esta equação representa uma hipersuperfície com um sistema de coordenadas espaciais  $x^i$  definido sobre ela. Para diferentes valores do parâmetro  $t$  teremos uma família de hipersuperfícies rotuladas por  $t$ .

A ação dada em coordenadas minkowskianas é:

$$S = \int d^4X \mathcal{L}_o\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial X^\alpha}\right) \quad (3.2)$$

onde  $\mathcal{L}_o$  representa a densidade lagrangeana em coordenadas minkowskianas. A ação

pode ser escrita nas coordenadas curvilíneas resultando em:

$$S = \int d^4x J \mathcal{L}_o \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{X^\alpha} \right) = \int d^4x \mathcal{L} \left( \phi, \phi_{,i}, \dot{\phi}, X_{,i}^\alpha, \dot{X}^\alpha \right) \quad (3.3)$$

onde  $\dot{\phi} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^0}$  e  $\phi_{,k} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$  e

$$J \equiv \frac{\partial(X^0 \dots X^3)}{\partial(x^0 \dots x^3)} \quad (3.4)$$

é o jacobiano da transformação. Deste modo  $\mathcal{L}$  indica a densidade lagrangeana em coordenadas curvilíneas. Definindo o momento canônico conjugado a  $\phi$ ,  $\pi_\phi$  na forma usual:

$$\pi_\phi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad (3.5)$$

obtemos a densidade hamiltoniana

$$\mathbf{h} = \pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad (3.6)$$

que é possível escrever como

$$\mathbf{h} = \frac{\partial x^0}{\partial X^\alpha} J T_\beta^\alpha \dot{X}^\beta \equiv K_\beta \dot{X}^\beta \quad (3.7)$$

sendo  $T_\beta^\alpha$  o tensor energia-momento nas coordenadas minkowskianas, dado por

$$T_\beta^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial X^\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial X^\beta} - \eta_\beta^\alpha \mathcal{L}_o \quad (3.8)$$

e  $K_\beta$  foi definido como

$$K_\beta \equiv \frac{\partial x^0}{\partial X^\alpha} J T_\beta^\alpha \quad (3.9)$$

A densidade hamiltoniana  $\mathbf{h}$  resulta ter uma dependência linear nas ‘velocidades cinemáticas’  $\dot{X}^\beta$ , já que  $K_\beta$  independe delas. A densidade lagrangeana será então dada por:

$$\mathcal{L} = \pi_\phi \dot{\phi} - K_\beta \dot{X}^\beta \quad (3.10)$$

Podemos definir os momentos ‘cinemáticos’ como

$$\Pi_\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\alpha} = -K_\alpha, \quad (3.11)$$

o que produz na verdade o vínculo

$$\Pi_\alpha + K_\alpha = 0, \quad (3.12)$$

ou seja,

$$\mathcal{H}_\alpha \equiv \Pi_\alpha + \frac{\partial x^0}{\partial X^\beta} J T_\alpha^\beta = 0. \quad (3.13)$$

Deste modo é possível escrever a ação numa forma linear tanto nas velocidades dinâmicas  $\dot{\phi}$  quanto nas velocidades cinemáticas  $\dot{X}^\beta$ , a saber

$$S = \int d^4x (\pi_\phi \dot{\phi} + \Pi_\beta \dot{X}^\beta). \quad (3.14)$$

Para que possamos variar livremente a ação sem nos preocuparmos com o vínculo (3.13), devemos acrescentar à mesma o termo  $N^\alpha \mathcal{H}_\alpha$  sendo  $N^\alpha$  multiplicadores de Lagrange. Assim

$$S = \int d^4x (\pi_\phi \dot{\phi} + \Pi_\beta \dot{X}^\beta - N^\alpha \mathcal{H}_\alpha). \quad (3.15)$$

Os vínculos (3.13) podem ser projetados nas direções normal e paralela á hipersuperfícies  $t = cte$

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_\alpha n^\alpha \quad (3.16)$$

$$\mathcal{H}_i \equiv \mathcal{H}_\alpha X_i^\alpha \quad (3.17)$$

onde  $X_i^\alpha$  são as componentes dos vetores tangentes à hipersuperfície na base  $\frac{\partial}{\partial X^\alpha}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial X^\alpha}$  e o vetor normal é definido por

$$\eta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \epsilon = \mp 1 \quad (3.18)$$

$$n_\alpha X_i^\alpha = 0 \quad (3.19)$$

( $-$  para assinatura hiperbólica e  $+$  para euclídea).

Portanto a forma geral dos vínculos será dada pela soma de uma parte cinemática e de uma parte dinâmica ou de campo:

$$\mathcal{H} \equiv \Pi_\alpha n^\alpha + \frac{\partial x^0}{\partial X^\beta} J T_\alpha^\beta n^\alpha = 0 \quad (3.20)$$

$$\mathcal{H}_i \equiv \Pi_\alpha X_i^\alpha + \frac{\partial x^0}{\partial X^\beta} J T_\alpha^\beta X_i^\alpha = 0 \quad (3.21)$$

O vínculo  $\mathcal{H}$  é chamado de super-hamiltoniano e o vínculo  $\mathcal{H}_i$  de super-momento. Expandindo  $N^\alpha$  na base  $(n^\alpha, X_i^\alpha)$ ,  $N^\alpha = N n^\alpha + N^i X_i^\alpha$ , teremos, para a ação,

$$S = \int d^4x (\pi_\phi \dot{\phi} + \Pi_\beta \dot{X}^\beta - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i) \quad (3.22)$$

Nesta ação, as variáveis canônicas  $\phi, \pi_\phi, X^\alpha, \Pi_\alpha$  são variadas, como já dissemos, independentemente. As equações de Hamilton que resultam vão determinar a evolução dessas variáveis canônicas com o tempo  $t$ . Ao variar com respeito aos multiplicadores de Lagrange  $N$  e  $N^i$  obtemos os vínculos

$$\mathcal{H} \approx 0, \quad \mathcal{H}_i \approx 0 \quad (3.23)$$

Utilizamos, nestas últimas equações, a notação e terminologia de Dirac: os vínculos são fracamente iguais a zero, indicando com isso que os parênteses de Poisson de uma quantidade  $A(\phi, \pi_\phi, X^\alpha, \Pi_\alpha)$  com um vínculo fracamente zero, não é zero necessariamente. Para que a teoria resulte consistente, os vínculos devem ser preservados no tempo  $t$ , o qual significa que seus parênteses de Poisson com a hamiltoniana devem se anular, quer dizer, devem ser fracamente zero. A hamiltoniana está dada por

$$H = \int d^3x (N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i), \quad (3.24)$$

Então, devido á arbitrariedade dos multiplicadores  $N$  e  $N^i$ , será  $\dot{\mathcal{H}} \approx 0$  e  $\dot{\mathcal{H}}_i \approx 0$  somente si os colchetes de Poisson dos vínculos avaliados em dois pontos  $x$  e  $y$  da hipersuperfície

$\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\}$ ,  $\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\}$  e  $\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(y)\}$  são fracamente zero. Este cálculo foi feito por Dirac (com  $\epsilon = -1$ ), que mostrou que estes colchetes se escrevem como uma certa combinação linear dos vínculos originais (é dizer que não aparecem novos vínculos) e satisfazem a seguinte álgebra (chamada de ‘álgebra de Dirac’)<sup>1</sup>[37] [39]:

$$\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} = \mathcal{H}^i(x) \partial_i \delta^3(x, y) - \mathcal{H}^i(y) \partial_i \delta^3(y, x) \quad (3.25)$$

$$\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\} = \mathcal{H}(x) \partial_i \delta^3(x, y) \quad (3.26)$$

$$\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(y)\} = \mathcal{H}_i(x) \partial_j \delta^3(x, y) - \mathcal{H}_j(y) \partial_i \delta^3(y, x) \quad (3.27)$$

onde os índices dos super-momentos sobem com a métrica  $h_{ij}$  induzida na hipersuperfície  $t = cte$ , a qual está dada por  $h_{ij} = \eta_{\alpha\beta} X_{,i}^\alpha X_{,j}^\alpha$ . Dirac obteve este resultado com os vínculos dados na forma (3.13).

Neste ponto resulta apropriado colocar um resultado, que será de importância fundamental no nosso estudo, e que foi obtido por Claudio Teitelboim [40]. Ele obteve esta álgebra (mas com a assinatura aparecendo explicitamente como vamos ver a seguir) de uma forma bem geral que independe da forma dos vínculos e sem ter assumido necessariamente um espaço-tempo de Minkowski. Nesse trabalho são estudadas as deformações de uma hipersuperfície embutida num espaço-tempo riemanniano. Intuitivamente, uma hipersuperfície rotulada pode ser deformada em geral segundo duas operações: deixar ela fixa no espaço-tempo no qual esta embutida e simplesmente re-rotular seus pontos, ou bem manter os rótulos e deforma-la. A primeira operação representa uma deformação  $\delta t N^i$ , tangencial à hipersuperfície, sendo governada por  $\bar{\mathcal{H}}_i$ . A segunda operação representa uma

---

<sup>1</sup>Rigurosamente não é uma álgebra já que as constantes de estrutura dependem da métrica[25]

deformação  $\delta t N$ , ortogonal à hipersuperfície e está governada por  $\bar{\mathcal{H}}$ . Qualquer funcional  $F$  das variáveis canônicas (campos e variáveis cinemáticas) definidos na hipersuperfície vão mudar quando esta é deformada, de acordo com o hamiltoniano dado por

$$\bar{H} = \int d^3x (N\bar{\mathcal{H}} + N^i\bar{\mathcal{H}}_i), \quad (3.28)$$

de modo que

$$\delta F = \int d^3x \{F, \delta N\bar{\mathcal{H}} + \delta N^i\bar{\mathcal{H}}_i\}. \quad (3.29)$$

Teitelboim utiliza um argumento puramente geométrico, baseado na ‘independência de caminho’ da evolução dinâmica: a mudança nas variáveis canônicas durante a evolução desde uma dada hipersuperfície inicial até uma dada hipersuperfície final deve ser independente da sequência particular de hipersuperfícies intermediárias, utilizadas na avaliação desta mudança. Assumindo então que as 3-geometrias estão imersas numa variedade 4-dimensional não degenerada, juntamente com a consistência da teoria, ele mostrou que os vínculos  $\bar{\mathcal{H}} \approx 0$  e  $\bar{\mathcal{H}}_i \approx 0$  devem satisfazer a seguinte álgebra

$$\{\bar{\mathcal{H}}(x), \bar{\mathcal{H}}(x')\} = -\epsilon [\bar{\mathcal{H}}^i(x) \partial_i \delta^3(x', x) - \bar{\mathcal{H}}^i(x') \partial_i \delta^3(x', x)], \quad (3.30)$$

$$\{\bar{\mathcal{H}}_i(x), \bar{\mathcal{H}}(x')\} = \bar{\mathcal{H}}(x) \partial_i \delta^3(x, x'), \quad (3.31)$$

$$\{\bar{\mathcal{H}}_i(x), \bar{\mathcal{H}}_j(x')\} = \bar{\mathcal{H}}_i(x) \partial_j \delta^3(x, x') - \bar{\mathcal{H}}_j(x') \partial_i \delta^3(x', x), \quad (3.32)$$

onde os índices dos super-momentos sobem com a métrica  $h_{ij}$  induzida na hipersuperfície  $t = cte$ , a qual está dada agora por  $h_{ij} = g_{\alpha\beta} X_{,i}^\alpha X_{,j}^\alpha$ , sendo  $g_{\alpha\beta}$  a métrica do espaço de fundo onde as hipersuperfícies estão embutidas. A constante  $\epsilon$  na Eq.(3.30) pode ser  $\pm 1$



dependendo se a 4-geometria na qual as 3-geometrias estão imersas, é euclideana ( $\epsilon = 1$ ) ou hiperbólica ( $\epsilon = -1$ ). Esta análise se aplica tanto para uma teoria de campos num fundo riemanniano já dado, quanto para o caso em que o fundo é gerado pela evolução, como na TRG. No primeiro caso a estrutura da álgebra dos vínculos impõe condições para que a invariância de Lorentz não seja quebrada. No caso da TRG a álgebra fornece as condições para a existência de um espaço-tempo: condições de imersibilidade que asseguram que a evolução das 3-geometrias pode ser interpretada como o movimento de um ‘corte’ 3-dimensional num espaço-tempo 4-dimensional com assinatura lorentziana. Este resultado aplicado ao caso da teoria de campos parametrizada em espaço-tempo plano que estamos estudando, implica que os vínculos da teoria devem satisfazer justamente a álgebra dada por (3.25) (3.26) (3.27).

Vamos considerar o caso de um campo escalar em espaço-tempo plano, cujo lagrangeano está dado por

$$\mathcal{L}_o = -\frac{1}{2} \left( \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi}{\partial X^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial X^\beta} + U(\phi) \right), \quad (3.33)$$

onde  $\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  Calculando com este lagrangeano o tensor momento-energia, Eq.(3.8), e substituindo nas (3.20) e (3.21) vamos obter os vínculos super-hamiltoniano e super-momento na forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\nu} (\Pi_\alpha \nu^\alpha + \frac{1}{2} \pi_\phi^2 + \frac{1}{2} \nu^2 (h^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} + U(\phi))) = 0, \quad (3.34)$$

$$\mathcal{H}_i = \Pi_\alpha X_i^\alpha + \pi_\phi \phi_{,i} = 0, \quad (3.35)$$

onde o vetor normal à hipersuperfície foi escrito na forma (veja [42] cap.7)  $n^\alpha = \frac{\nu^\alpha}{\nu}$ , sendo

$$\nu_\alpha \equiv -\frac{1}{3!}\epsilon_{\alpha\alpha1\alpha2\alpha3}\frac{\partial(X^{\alpha1}X^{\alpha2}X^{\alpha3})}{\partial(x^1x^2x^3)} \quad (3.36)$$

e  $\nu$  é a norma de  $\nu^\alpha$

$$\nu = \sqrt{-\nu^\alpha\nu_\alpha} \quad (3.37)$$

Pode se mostrar que resulta  $-\nu^\alpha\nu_\alpha = h$  onde  $h \equiv \det(h_{ij})$  é o determinante da métrica induzida na hipersuperfície.

Os vínculos satisfazem, como vimos, a álgebra de Dirac. Na seção seguinte vamos quantizar este modelo e interpretar segundo Bohm-de Broglie, mas passando a uma visão hamiltoniana da mesma.

## 3.2 Teoria de campos parametrizadas na interpretação de Bohm-de Broglie

Nesta seção vamos estudar a interpretação de Bohm-de Broglie da teoria de campos parametrizada, desenvolvida na seção anterior. Primeiramente quantizaremos seguindo a prescrição de Dirac. As coordenadas  $\phi^A \equiv (X^0, X^1, X^2, X^3, \phi)$  e os momentos  $\pi_A \equiv (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \pi_\phi)$  se tornam operadores, satisfazendo as relações de comutação

$$[\phi^A(x), \phi^B(y)] = 0, [\pi_A(x), \pi^B(y)] = 0 \quad (3.38)$$

$$[\phi^A(x), \pi_B(y)] = i\hbar\delta_B^A\delta(x, y) \quad (3.39)$$

e  $x, y$  são dois pontos da hipersuperfície. Os vínculos atuam aniquilando o estado, produzindo condições sobre os estados possíveis:

$$\hat{\mathcal{H}}_i | \Psi \rangle = 0 \quad (3.40)$$

$$\hat{\mathcal{H}} | \Psi \rangle = 0 \quad (3.41)$$

Na representação  $\phi^A(x)$  ('de coordenadas') o estado do campo escalar está descrito pelo funcional  $\Psi[\phi^A(x)]$  e o operador momento é uma derivada funcional:  $\pi_A(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \phi^A(x)}$ . Substituindo na Eq. (3.40) e levando em conta o super-momento Eq.(3.35) temos

$$-i\hbar X_i^\alpha \frac{\delta \Psi}{\delta X^\alpha(x)} - i\hbar \phi_{,i} \frac{\delta \Psi}{\delta \phi(x)} = 0 \quad (3.42)$$

Esta equação implica que  $\Psi$  é um invariante sob transformações de coordenadas espaciais na hipersuperfície.

Substituindo na Eq. (3.41) o super-hamiltoniano, dado na seção anterior na Eq. (3.34), temos

$$\mathcal{H}(x)\Psi = \frac{1}{\nu} \left( -i\hbar \nu^\alpha \frac{\delta \Psi}{\delta X^\alpha(x)} - (\hbar)^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta \phi(x)^2} + \frac{1}{2} \nu^2 \left( h^{ij}(x) \phi(x)_{,i} \phi(x)_{,j} + U(\phi(x)) \right) \right) \Psi = 0 \quad (3.43)$$

Para interpretar segundo Bohm-de Broglie fazemos como é usual, escrevemos o funcional de onda em forma polar  $\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}S}$ . Substituindo na (3.42) vamos obter duas equações que indicam que tanto  $S$  quanto  $A$  são invariantes sob transformações gerais de coordenadas espaciais

$$X_i^\alpha \frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)} + \phi_{,i} \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = 0 \quad (3.44)$$

$$X_i^\alpha \frac{\delta A}{\delta X^\alpha(x)} + \phi_{,i} \frac{\delta A}{\delta \phi(x)} = 0 \quad (3.45)$$

Substituindo a forma polar da  $\Psi$  na Eq.(3.43) vamos obter duas equações que dependerão do ordenamento escolhido. Porém, a equação que sai da parte real, depois de dividir pela amplitude  $A$ , será

$$\frac{1}{\nu} \left( \nu^\alpha \frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \nu^2 (h^{ij}(x) \phi(x)_{,i} \phi(x)_{,j} + U(\phi(x))) \right) + \mathcal{Q} = 0 \quad (3.46)$$

Esta é uma equação tipo Hamilton-Jacobi modificada pelo potencial quântico, dado pelo último termo. Vemos que somente este termo vai depender da regularização e ordenamento, já que os outros termos desta equação estão bem definidos. Segundo a forma não regulada dada na Eq (3.43),  $\mathcal{Q}$  resulta:

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{\nu} \frac{\hbar^2}{2A} \frac{\delta^2 A}{\delta \phi(x)^2} \quad (3.47)$$

a outra equação, que sai reordenando a parte imaginária, é

$$\nu^\alpha \frac{\delta A^2}{\delta X^\alpha} + \frac{\delta(A^2 \frac{\delta S}{\delta \phi})}{\delta \phi} = 0 \quad (3.48)$$

Notamos que na interpretação de Bohm-de Broglie as variáveis canônicas existem independentemente da observação, e, como vimos no capítulo 2, a evolução das coordenadas canônicas  $\phi$  e  $X^\alpha$  é obtida das relações guia de Bohm, dadas por:

$$\Pi_\alpha = \frac{\delta S(\phi, X^\alpha)}{\delta X^\alpha} \quad (3.49)$$

$$\pi_\phi = \frac{\delta S(\phi, X^\alpha)}{\delta \phi} \quad (3.50)$$

Dados os valores iniciais do campo  $\phi(t_0, x^i)$  e das variáveis cinemáticas  $X^\alpha(t_0, x^i)$  numa hipersuperfície inicial  $x^0 = t_0 = cte$ , podemos integrar estas equações de primeiro ordem e obter assim as trajetórias bohmianas, isto é, os valores do campo  $\phi(t, x^i)$  e das  $X^\alpha(t, x^i)$  para todo valor do parâmetro  $t$ . A evolução desses campos será diferente da clássica devido à presença do potencial quântico na Eq. de Hamilton-Jacobi da teoria de Bohm-de Broglie, Eq. (3.46). Como sabemos, o limite clássico é obtido exigindo-se que  $\mathcal{Q} = 0$ . Neste caso o funcional  $S$  é solução da equação de Hamilton -Jacobi clássica, e sabemos que ao integrar as equações (3.49) e (3.50), as soluções que se obtém representam um campo  $\phi$  evoluindo num espaço-tempo de Minkowski. Isto segue do fato de que os vínculos da teoria clássica satisfazem a algebra de Dirac (3.30) (3.31) (3.32) com  $\epsilon = -1$ . Mas, se o potencial quântico não é zero, então  $S$  é solução da equação de Hamilton-Jacobi *modificada* (3.46) e, portanto, não podemos assegurar que a solução obtida para  $\phi^A$  represente todavia um campo num espaço tempo de Minkowski. Os efeitos quânticos poderiam quebrar a invariância de Lorentz e modificar assim a causalidade einsteniana da relatividade especial. Então perguntamos: qual tipo de estrutura corresponderá à este caso?. Para encarar esta questão vamos re-escrever a teoria de Bohm-de Broglie, que está formulada usualmente em termos da equação de Hamilton-Jacobi, numa forma Hamiltoniana.

As relações de Bohm (3.49) (3.50) permitem escrever (3.46) na forma:

$$\frac{1}{\nu} \left( \nu^\alpha \Pi_\alpha + \frac{1}{2} \pi_\phi^2 + \frac{1}{2} \nu^2 \left( h^{ij}(x) \phi(x)_{,i} \phi(x)_{,j} + U(\phi(x)) \right) \right) + \mathcal{Q} = 0 \quad (3.51)$$

O potencial quântico  $\mathcal{Q}$  resulta ser uma densidade escalar de peso 1. Isto pode ser visto considerando a expressão para  $\mathcal{Q}$  que se obtém da equação de Hamilton-Jacobi modificada, Eq.(3.46)

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{\nu} \left( \nu^\alpha \frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \nu^2 \left( h^{ij}(x) \phi(x)_{,i} \phi(x)_{,j} + U(\phi(x)) \right) \right) \quad (3.52)$$

Lembramos que  $\nu = \sqrt{\hbar}$  é uma densidade escalar de peso 1, e que a fase  $S$  é um invariante perante transformações gerais de coordenadas na hipersuperfície (isto resulta do vínculo super-momento aplicado a  $\Psi$ , Eq.(3.44)). Então  $\frac{\delta S}{\delta X^\alpha}$  é uma densidade vetorial, que estando contraída com o vetor normal, resulta em uma densidade escalar de peso 1. Para o segundo termo usamos o mesmo raciocínio e o terceiro é obviamente uma densidade de peso 1. Assim  $\mathcal{Q}$  é uma soma de densidades escalares de peso 1, e portanto ele também é.

Podemos escrever a Eq.(3.51) da seguinte forma

$$\mathcal{H} + \mathcal{Q} = 0 \quad (3.53)$$

onde  $\mathcal{H}$  é o super-hamiltoniano clássico dado por (3.34). Então, o super-hamiltoniano quântico ou de Bohm vai ser:

$$\mathcal{H}_Q \equiv \mathcal{H} + \mathcal{Q} \quad (3.54)$$

O hamiltoniano que gera as trajetórias bohmianas, uma vez satisfeitas inicialmente as relações guia (3.49) e (3.50) será:

$$H_Q = \int d^3x \left[ N \mathcal{H}_Q + N^i \mathcal{H}_i \right]. \quad (3.55)$$

Isto pode-se ver notando que as relações guia são consistentes com os vínculos  $\mathcal{H}_Q \approx 0$  e  $\mathcal{H}_i \approx 0$ , pois  $S$  satisfaz (3.44) e (3.46). Ademais elas são conservadas na evolução gerada pelo hamiltoniano (3.55). Vamos mostrar isto. Escrevemos primeiramente as relações de Bohm (3.49) (3.50) de uma forma adaptada ao formalismo hamiltoniano, a saber

$$\Phi_\alpha \equiv \Pi_\alpha - \frac{\delta S}{\delta X^\alpha} \approx 0, \quad (3.56)$$

$$\Phi_\phi \equiv \pi_\phi - \frac{\delta S}{\delta \phi} \approx 0. \quad (3.57)$$

A conservação no tempo das relações de Bohm significa que  $\dot{\Phi}_\phi \equiv \{\Phi_\phi, H_Q\} = 0$  e  $\dot{\Phi}_\alpha \equiv \{\Phi_\alpha, H_Q\} = 0$ . Isto por sua vez equivale a provar que os parênteses de Poisson com os vínculos  $\mathcal{H}_Q$  e  $\mathcal{H}_i$  se anulam. Calculemos então  $\{\Phi_\phi, \mathcal{H}_Q\}$ ,  $\{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_Q\}$ ,  $\{\Phi_\phi, \mathcal{H}_i\}$  e  $\{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_i\}$ . Para simplificar a notação, definimos  $W \equiv h^{ij}(x)\phi(x)_{,i}\phi(x)_{,j} + U(\phi(x))$ , de modo que o hamiltoniano quântico se escreve

$$\mathcal{H}_Q \equiv \mathcal{H} + \mathcal{Q} = \frac{1}{\nu} \left( \nu^\alpha \Pi_\alpha + \frac{1}{2} \pi_\phi^2 + \frac{1}{2} \nu^2 W \right) + \mathcal{Q} \quad (3.58)$$

Calculando temos

$$\{\Phi_\phi(y), \mathcal{H}_Q(x)\} = \left\{ \Pi_\alpha - \frac{\delta S}{\delta X^\alpha}, \frac{1}{\nu} \left( \nu^\alpha \Pi_\alpha + \frac{1}{2} \pi_\phi^2 + \frac{1}{2} \nu^2 W \right) + \mathcal{Q} \right\} =$$

$$-\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\left\{\frac{1}{\nu}\left(\nu^\alpha\frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi}\right)^2+\frac{1}{2}\nu^2W\right)+\mathcal{Q}\right\}-\frac{1}{\nu}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi^2}\Phi_\phi \quad (3.59)$$

onde o primeiro termo do lado direito desta equação respresenta a derivada funcional com relação a  $\phi(y)$ , do lado esquerdo da da equação de Hamilton-Jacobi modificada, Eq (3.46). Por tanto é identicamente zero. O segundo termo do lado direito resulta ser fracamente zero em virtude da relação de Bohm (3.57). Temos então que

$$\{\Phi_\phi(y), \mathcal{H}_Q(x)\} = -\frac{1}{\nu}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(y)^2}\Phi_\phi(x) \approx 0 \quad (3.60)$$

Para o parênteses  $\{\Phi_\alpha(y), \mathcal{H}_Q(x)\}$  temos

$$\begin{aligned} \{\Phi_\alpha(y), \mathcal{H}_Q(x)\} = & -\frac{\delta}{\delta X^\alpha(y)}\left\{\frac{1}{\nu}\left(\nu^\alpha\frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\right)^2+\frac{1}{2}\nu^2W\right)+\mathcal{Q}\right\} \\ & -\frac{1}{\nu}\frac{\delta\nu^\beta}{\delta X^\alpha(y)}\Phi_\beta - \frac{\delta\nu^{-1}}{\delta X^\alpha(y)}\nu^\beta\Phi_\beta - \frac{1}{2}\frac{\delta\nu^{-1}}{\delta X^\alpha(y)}\left(\Phi_\phi^2+2\frac{\delta S}{\delta\phi}\Phi_\phi\right)-\frac{1}{\nu}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta X^\alpha(y)}\Phi_\phi \approx 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde o primeiro termo do lado direito desta equação respresenta a derivada funcional com relação a  $X^\alpha(y)$ , do lado esquerdo da equação de Hamilton-Jacobi modificada, Eq (3.46), sendo, portanto, identicamente zero. Os outros termos são fracamente zero em virtude das relações de Bohm (3.56) (3.57).

Para calcular os parênteses de Poisson que envolvem o vínculo super-momento usamos o fato de que este é gerador de transformações espaciais de coordenadas. Temos que, sendo  $S$  um invariante, então  $\Phi_\alpha$  é uma densidade vetorial e  $\Phi_\phi$  uma densidade escalar. Portanto temos

$$\{\Phi_\phi(y), \mathcal{H}_i(x)\} = -\Phi_\phi(x)\partial_i\delta(y, x) \approx 0, \quad (3.62)$$



$$\{\Phi_\alpha(y), \mathcal{H}_i(x)\} = \Phi_i(x)\partial_\alpha\delta(y, x) - \Phi_\alpha(y)\partial_i\delta(y, x) \approx 0. \quad (3.63)$$

Combinando estes resultados obtemos

$$\dot{\Phi}_\phi = \{\Phi_\phi, H_Q\} \approx 0, \quad (3.64)$$

$$\dot{\Phi}_\alpha = \{\Phi_\alpha, H_Q\} \approx 0. \quad (3.65)$$

Ou seja, as relações guia de Bohm são conservadas.

Dado que o potencial quântico não depende dos momentos, temos que as definições dos momentos em termos das velocidades continuam sendo as mesmas do caso clássico:

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_Q\} = \{\phi, H\}, \quad (3.66)$$

$$\dot{X}^\alpha = \{X^\alpha, H_Q\} = \{X^\alpha, H\}. \quad (3.67)$$

Expressamos a teoria de Bohm-de Broglie em forma hamiltoniana, e estamos interessados em estudar que tipo de estrutura vai corresponder à evolução bohmiana gerada pelo hamiltoniano (3.55). Os vínculos  $\mathcal{H}_i \approx 0$  e  $\mathcal{H}_Q \approx 0$  devem se manter no tempo para que a teoria resulte consistente. A consistência da teoria equivale a que os vínculos tenham parênteses de Poisson fracamente zero entre eles. No contexto do trabalho de Teitelboim explicado antes, vamos analisar a álgebra satisfeita pelos vínculos  $\mathcal{H}_i \approx 0$  e  $\mathcal{H}_Q \approx 0$ . O parênteses de Poisson  $\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(y)\}$  satisfaz a Eq. (3.27) já que o  $\mathcal{H}_i$  de  $H_Q$  definido na

Eq. (3.55) é o mesmo que na teoria clássica. Da mesma forma,  $\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_Q(y)\}$  satisfaz a Eq. (3.26) pois  $\mathcal{H}_i$  é o gerador de transformações espaciais de coordenadas, e como  $\mathcal{H}_Q$  é uma densidade escalar de peso 1 pois  $Q$  é uma densidade escalar de peso 1, então ele deve satisfazer esta relação de colchetes de Poisson com  $\mathcal{H}_i$ . O que resta ser verificado é se o colchete de Poisson  $\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(y)\}$  fecha e se é como na Eq. (3.25). Vamos ver que efetivamente este colchete resulta fracamente zero independentemente do potencial quântico. Este fato significa que a teoria é consistente para qualquer  $Q$  e, portanto, para qualquer estado. Assim,

$$\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(y)\} = \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} + \{\mathcal{H}(x), Q(y)\} + \{Q(x), \mathcal{H}(y)\}. \quad (3.68)$$

Da equação (3.46) podemos escrever o potencial quântico como:

$$Q = -\frac{1}{\nu} \left( \nu^\alpha \frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \nu^2 \left( h^{ij}(x) \phi(x)_{,i} \phi(x)_{,j} + U(\phi(x)) \right) \right) \quad (3.69)$$

Substituindo esta última na Eq.(3.68) e usando as relações guia de Bohm dadas por (3.56) (3.57) encontramos que

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(y)\} = & \frac{1}{\nu(x)\nu(y)} \left( \left( \frac{\delta S}{\delta \phi(y)} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} + \right. \right. \\ & \left. \left. \nu^\alpha(y) \frac{\delta^2 S}{\delta X^\alpha(y) \delta \phi(x)} \right) \Phi_\phi(x) - \left( \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(y) \delta \phi(x)} + \right. \right. \\ & \left. \left. \nu^\alpha(x) \frac{\delta^2 S}{\delta X^\alpha(x) \delta \phi(y)} \right) \Phi_\phi(y) + \nu^\alpha(y) \frac{\delta \nu^\beta(x)}{\delta X^\alpha(y)} \Phi_\beta(y) - \nu^\alpha(x) \frac{\delta \nu^\beta(y)}{\delta X^\alpha(x)} \Phi_\beta(y) \right) \approx 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

O lado direito desta equação é fracamente zero em virtude das relações de Bohm (3.56) e (3.57).

Vemos, portanto, que a interpretação de Bohm-de Broglie de um campo escalar num fundo de Minkowski, é uma teoria consistente. Mas, a álgebra dos vínculos não fecha necessariamente segundo a álgebra de Dirac. Isto vai depender da forma do  $Q$ . Se o potencial quântico quebra a álgebra de Dirac então, de acordo com o trabalho de Teitelboim sintetizado na seção anterior, a estrutura do espaço-tempo de fundo vai ser modificada, não será mais Minkowski. Isto significa que a invariância de Lorentz será quebrada. Uma situação análoga vai ser mostrada no caso da geometrodinâmica quântica, onde o potencial quântico vai determinar a estrutura quântica do Universo. A seguir mostraremos que já o estado de vácuo do campo escalar livre produz um potencial quântico que quebra a álgebra de Dirac. O cálculo deste potencial quântico é apresentado no apêndice A, onde estudamos um campo escalar livre num espaço-tempo de Minkowski. Ali é mostrado que o potencial quântico para o estado de vácuo é

$$Q = -\frac{1}{2} \int d^3X \left( \int d^3Y \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \cos k \cdot (X - Y) \phi(Y) \right)^2 + \frac{1}{2} \int d^3X \int d^3k \omega_k \quad (3.71)$$

que escrevemos como

$$Q = \int d^3X f(X^i, \phi), \quad (3.72)$$

onde  $f$  é uma função de  $X^i$  e um funcional de  $\phi$  dado por

$$f \equiv -\frac{1}{2} \left( \int d^3Y \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \cos\{k \cdot (X - Y)\} \phi(Y) \right)^2 + \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k. \quad (3.73)$$

Escreveremos  $f$  como

$$f = -B^2 + E_0, \quad (3.74)$$

onde

$$B \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \int d^3Y \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \cos\{k \cdot (X - Y)\} \phi(Y), \quad (3.75)$$

$$E_0 \equiv \frac{1}{2} \int d^3X \int d^3k \omega_k \quad (3.76)$$

Pasando às coordenadas da hipersuperfície  $x^i$  temos

$$Q = \int d^3x J f(X^i(x^j), \phi), \quad (3.77)$$

sendo  $J$  o jacobiano  $J = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} \frac{\partial X^i}{\partial x^a} \frac{\partial X^j}{\partial x^b} \frac{\partial X^k}{\partial x^c}$ . Assim, o  $\mathcal{Q}$  (a densidade) que entra no super-hamiltoniano quântico Eq. (3.54) será:

$$\mathcal{Q} = J f(X^i(x^j), \phi) \quad (3.78)$$

Calculemos o parênteses de Poisson  $\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(y)\}$ . Temos

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(y)\} &= \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} + \{\mathcal{H}(x), Q(y)\} + \{Q(x), \mathcal{H}(y)\} = \\ &\mathcal{H}^i(x) \partial_i \delta^3(x, y) - \mathcal{H}^i(y) \partial_i \delta^3(y, x) + \{\mathcal{H}(x), Q(y)\} + \{Q(x), \mathcal{H}(y)\} \end{aligned} \quad (3.79)$$

onde os dois primeiros termos do lado direito são exatamente aqueles que aparecem na álgebra de Dirac Eq.(3.25). Portanto, para que a álgebra de Dirac se mantenha, é necessário que  $\{\mathcal{H}(x), Q(y)\} + \{Q(x), \mathcal{H}(y)\}$  seja fortemente zero. Entretanto,

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}(x), Q(y)\} + \{Q(x), \mathcal{H}(y)\} = & +2 \frac{\nu^\alpha(y)}{\nu(y)} f(y) \epsilon_{\alpha j k} \epsilon^{abc} \frac{\partial X^j}{\partial y_b} \frac{\partial X^k}{\partial y_c} \frac{\partial \delta(y, x)}{\partial y_a} + \\
& 2 \frac{J(y)}{\nu(x)} \pi_\phi B(y) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_k \cos k \cdot (X(y) - x) - 2 \frac{\nu^\alpha(x)}{\nu(x)} f(x) \epsilon_{\alpha j k} \epsilon^{abc} \frac{\partial X^j}{\partial x_b} \frac{\partial X^k}{\partial x_c} \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x_a} + \\
& 2 \frac{J(x)}{\nu(y)} \pi_\phi(y) B(x) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_k \cos k \cdot (X(x) - y) \quad (3.80)
\end{aligned}$$

e o lado direito desta equação é evidentemente diferente de zero. Assim a álgebra de Dirac não é satisfeita neste exemplo particular. Isto está nos dizendo, no contexto geometrodinâmico do trabalho de Teitelboim já discutido, que as trajetórias bohmianas estão gerando uma estrutura que não corresponde a um campo relativístico no espaço-tempo de Minkowski. Em outras palavras, mostramos a quebra da invariância de Lorentz da teoria em termos da quebra da álgebra de Dirac dos vínculos. Ressaltamos que a invariância relativística é perdida a nível de eventos individuais. As propriedades observáveis do campo são basicamente estatísticas e estão contidas nos valores esperados dos operadores

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \int \Psi * [\phi] (\hat{A} \Psi) [\phi] D\phi \quad (3.81)$$

os quais continuam sendo invariantes. Enquanto a invariância dos eventos individuais pode em geral ser quebrada, como vimos explicitamente no exemplo acima, a relatividade especial vai ser verificada nos experimentos que testem e confirmem o formalismo probabilístico. A invariância Lorentz é um efeito estatístico [15] [16]. Salientamos que os resultados obtidos neste capítulo não dependem de se ter assumido dimensão 4 e são válidos para um espaço-tempo de Minkowski de qualquer dimensão  $n \geq 2$ .

## Capítulo 4

# Quântização Canônica da Gravitação

Não existe ainda uma teoria quântica da gravitação estabelecida. A TRG conduz a sua própria inaplicabilidade: suaves condições iniciais podem evoluir em singularidades na forma de buracos negros, talvez num grande colapso final ('big crunch'), ou evoluíram de uma singularidade inicial cosmológica chamada de 'big bang'. Nessas configurações a teoria perde o seu poder preditivo. Este é o conteúdo dos 'teoremas das singularidades' [41]. Assim, é nosso trabalho procurar outra teoria que possa descrever o Universo, mesmo num hipotético instante de criação. Neste caso, temos que admitir que as suaves condições iniciais assumidas nos teoremas de singularidades não são mais válidas sob situações extremas de densidades de energia e curvatura muito altas (escala de Planck). Podemos dizer que a TRG e outras teorias que descrevem os campos de matéria devam ser modificadas sob estas condições extremas.

Para realizar esta modificação, poderíamos pensar (por analogia com a eletrodinâmica quântica) que os efeitos quânticos da gravitação começam, nestas condições, a ser importantes. Este é um procedimento natural pois historicamente teorias que desenvolveram singularidades foram resolvidas por meio da quantização, como a eletrodinâmica. Além

disso, um universo de campos quantizados (eletro-fraca e cromodinâmica quânticas) em interação com um campo gravitacional fundamental clássico resulta inconsistente [44][47]. Ademais, as constantes fundamentais  $G$  (constante de Newton),  $\hbar$  (constante de Planck) e  $c$  (velocidade da luz) indicam a escala onde será relevante uma teoria quântica da gravitação:

$$\begin{aligned}
 L_{pl} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-33} cm \\
 T_{pl} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \sim 10^{-45} s \\
 M_{pl} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \sim 10^{-5} g \\
 \rho_{pl} &= \frac{c^5}{\hbar G^2} \sim 10^{94} g/cm^3
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

que são respetivamente, o comprimento de Planck, o tempo de Planck, a massa de Planck e a densidade de Planck.

Outra razão que justifica quantizar a gravitação é que uma teoria quântica da gravidade ao ser aplicada na cosmologia pode constituir uma teoria de condições iniciais para o Universo. Uma teoria de condições iniciais do Universo é necessária em Cosmologia desde que desejemos explicar porque o Universo em que vivimos hoje tem as marcadas propriedades de isotropia e homogeneidade, com pequenas desvios deste estado altamente simétrico que são amplificados pela interação gravitacional. As soluções das equações de Einstein com estas simetrias são de medida nula, então porque não vivemos num universo altamente não homogêneo e anisotrópico? A cosmologia quântica é uma teoria que poderia explicar isto [48] [49]. A idéia de inflação [50][51] ajuda nesta questão mas não a resolve

porque também precisa de condições iniciais para acontecer. A cosmologia quântica é o estudo da aplicação de teorias de gravitação quântica ao problema específico da origem e evolução do Universo [52][45][46].

Quantizaremos a TRG. Utilizaremos o conhecido formalismo canônico que está baseado na versão hamiltoniana da TRG. A idéia aqui é obter uma equação funcional quântica para o funcional do universo, a qual é analoga à equação de Schrödinger. Este formalismo não é muito popular entre as outras teorias de campos (para uma comparação deste com os formalismos mais usuais veja por exemplo [54, 55, 56]). Para construir o hamiltoniano da TRG, o espaço-tempo é folheado por uma família de hipersuperfícies tipo-espaço, uma para cada valor de  $t = cte$ , coordenada que define uma direção tipo-tempo. Isto implica que estamos restringindo o espaço-tempo a variedades 4-dimensionais do tipo  $M^4 = R \otimes M^3$ . Então, além de destruir a covariância manifesta da teoria, este procedimento não permite considerar espaços de outra topologia diferente desta, como por exemplo espaços com rotação e com curvas de tipo-tempo fechadas como espaços de Goedel [57] [58]. Quer dizer que questões acerca de da existência de curvas tipo-tempo fechadas não podem ser respondidas neste formalismo.

## 4.1 Formalismo hamiltoniano clássico

Começamos então com a separação 3+1 do espaço-tempo [59] [60] [53]. Primeiramente escolhemos um parâmetro que descreverá a evolução dinâmica do sistema, seja por exemplo  $x^0$ , que desempenhará o papel de tempo  $x^0 = t$ . O estado físico do sistema num determinado instante  $t$  significa dar a configuração das variáveis canônicas numa certa



hipersuperfície 3-dimensional tipo-espaço. Uma determinada hipersuperfície  $t = cte$  pode ser descrita pelas equações paramétricas

$$X^\alpha = X^\alpha(x^i) \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Seus três vetores tangentes  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  tem componentes  $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}$  na base  $\frac{\partial}{\partial X^\alpha}$  e o vetor normal unitário a esta hipersuperfície  $\mathbf{n} = n^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}$  está definido por

$$\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = -1 \quad \mathbf{g}(\mathbf{n}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = 0, \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{g}$  é o tensor métrico. No sistema de coordenadas de base  $\frac{\partial}{\partial X^\alpha}$  ficam

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -1, \quad (4.4)$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} X_i^\alpha n^\alpha = 0, \quad (4.5)$$

Como no capítulo precedente. Para cada valor do parâmetro  $t = cte$  vamos ter uma hipersuperfície diferente e o conjunto de todas elas, que forma o espaço-tempo, pode ser descrito por

$$X^\alpha = X^\alpha(x^i, t). \quad (4.6)$$

O vetor deformação, que conecta dois pontos com o mesmo rótulo  $x^i$  em duas hipersuperfícies próximas, é dado por  $\frac{\partial}{\partial t}$  que se escreve  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X^\alpha}$  e chamamos  $N^\alpha \equiv \frac{\partial X^\alpha}{\partial t}$  suas componentes na base  $\frac{\partial}{\partial X^\alpha}$ . Este vetor pode ser escrito na base dada pelo vetor normal unitário  $\mathbf{n}$ , e os vetores tangentes á hipersuperfície  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  como sendo

$$\frac{\partial}{\partial t} = N \mathbf{n} + N^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (4.7)$$

de modo que para as componentes na base  $\frac{\partial}{\partial X^\alpha}$  temos

$$N^\alpha = N n^\alpha + N^i \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}, \quad (4.8)$$

onde  $N$  é conhecida como a função lapso e  $N^i$  função deslocamento. Notemos que estas quantidades aparecem devido ao fato de as linhas coordenadas do tempo  $t$ , das quais  $\frac{\partial}{\partial t}$  é tangente, não serem necessariamente ortogonais à hipersuperfície. No sistema de coordenadas  $x^\mu = (t, x^i)$ , temos para a métrica espacial

$$g_{ij} \equiv \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad (4.9)$$

que em termos da métrica na base antiga é

$$g_{ij} = \tilde{g}_{\mu\nu} X_i^\mu X_j^\nu. \quad (4.10)$$

Assim,  $g_{ij}$  é a métrica induzida na hipersuperfície (ou métrica intrínseca), que chamaremos de  $h_{ij}$  ( $h_{ij} \equiv g_{ij}$ ) e que sobe e desce os índices na hipersuperfície. Em particular,  $N_j \equiv N^i h_{ij}$ . Também

$$g_{0i} \equiv \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \mathbf{g}\left(N \mathbf{n} + N^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = h_{ij} N^j = N_i, \quad (4.11)$$

$$g_{00} \equiv \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \mathbf{g}\left(N\mathbf{n} + N^i \frac{\partial}{\partial x^i}, N\mathbf{n} + N^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -N^2 + N^i N^j h_{ij} = -N^2 + N^i N_i, \quad (4.12)$$

Calculando a inversa  $g^{\mu\nu}$  temos

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2}; \quad g^{0i} = \frac{N^i}{N^2}; \quad g^{ij} = h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2}. \quad (4.13)$$

Isto permite escrever o intervalo  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  na forma conhecida como *ADM* ou 3+1 [59]

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= (N_i N^i - N^2) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j = \\ &= N^2 dt^2 + h_{ij} (N^i dt + dx^i) (N^j dt + dx^j) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Examinando a equação (4.14), podemos ver que  $N(t, x^k)$  mede a taxa de variação com relação ao tempo coordenado  $t$ , do tempo próprio do observador com 4-velocidade  $n^\mu(t, x^k)$  no ponto  $(t, x^k)$ . Por isso o nome função lapso. Também,  $N^i(t, x^k)$  nos dá a taxa de variação com relação ao tempo coordenado  $t$ , do deslocamento dos pontos com o mesmo rótulo  $x^i$  ao passar da hipersuperfície  $t = cte$  à hipersuperfície  $t + dt = cte$ . Por isso o nome função deslocamento. A interpretação geométrica pode-se ver ao considerar o vetor deformação na forma (4.7).

Uma hipersuperfície caracterizada pela métrica  $h_{ij}(x^a)$  tem uma curvatura intrínseca associada a sua 3-geometria, que pode ser calculada da forma usual. Mas esta hiper-

superfície pode estar curvada com relação à variedade quadridimensional na qual está imersa, de maneira arbitrária. Então, para descrever univocamente o tipo de folheação a que foi submetido o espaço-tempo quadridimensional, é preciso caracterizar a curvatura das hipersuperfícies em relação ao espaço-tempo quadridimensional. O vetor normal à hipersuperfície serve para realizar esta tarefa por meio de sua variação ao ser transportado paralelamente ao longo da hipersuperfície. Esta variação está dada pela derivada covariante. Deste modo definimos o tensor curvatura extrínseca

$$K_{\mu\nu} \equiv -h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \nabla_{(\alpha} n_{\beta)}, \quad (4.15)$$

sendo  $h_{\mu}^{\alpha} \equiv \delta_{\mu}^{\alpha} + n^{\alpha} n_{\mu}$  o projetor sobre a hipersuperfície da qual  $n^{\mu}$  é normal, e  $\nabla_{\alpha} n_{\beta} \equiv n_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} n_{\epsilon}$  é a derivada covariante de  $n^{\mu}$ . As componentes que serão relevantes são:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -N \Gamma_{ij}^0 \\ &= \frac{1}{2N} (D_{(i} N_{j)} - \partial_t h_{ij}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde  $D_i$  é a derivada covariante intrínseca à hipersuperfície 3-dimensional de métrica  $h_{ij}(x)$ , de modo que

$$D_i N_j \equiv \partial_i N_j - {}^3\Gamma_{ij}^a N_a, \quad (4.17)$$

sendo  ${}^3\Gamma_{ij}^a$  a conexão intrínseca a esta hipersuperfície. Usando (4.13), (4.14) e (4.16), obtemos para o escalar de curvatura [53]:

$$R = R^{(3)} + K^{ki} K_{ki} + K^2 - \frac{2}{N} \partial_t K + \frac{2N^i}{N} \partial_i K - \frac{2}{N} D_k (\partial^k N), \quad (4.18)$$

onde  $R^{(3)}$  é o escalar de curvatura das hipersuperfícies construído com os  ${}^3\Gamma_{ij}^a$ .

A densidade lagrangeana de Einstein-Hilbert pode se escrever como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_E &= \frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}R = \frac{1}{\kappa}Nh^{1/2}R \\ &= \frac{1}{\kappa}(Nh^{1/2}(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} - K^2) - 2\partial_t(h^{1/2}K) + \\ &\quad + 2\partial_i(h^{1/2}KN^i - h^{1/2}h^{ki}\partial_k N)).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Aqui,  $\kappa = \frac{16\pi G}{c^4}$ . O termo dado pela derivada temporal total vai ser eliminado já que conduz a inconsistências na formulação em integrais de trajetória da teoria quântica [61], e além disso exige impor novas condições nos bordos ao fazer a variação da ação [46]. O termo dado pela derivada espacial total não é importante já que não muda as equações de movimento. Estes termos podem ser importantes no caso de espaços-tempos abertos ao se obter as corretas equações de Hamilton, e a energia total gravitacional (caso exista) [62]. São importantes no estudo de buracos negros quânticos. Na cosmologia quântica de um universo fechado, estes termos são zero e portanto podem ser descartados da lagrangeana. Existem argumentos, baseados em integrais de trajetória, contra a existência de universos abertos. Além disso os universos fechados são conceitualmente e tecnicamente mais simples. Iremos concentrar nosso estudo nestes universos. Assim a densidade lagrangeana gravitacional se reduz a

$$\mathcal{L}[N, N^i, h_{ij}] = \frac{1}{\kappa}Nh^{1/2}(R^{(3)} + K^{ij}K_{ij} - K^2).\tag{4.20}$$

Para o lagrangeano temos

$$L = \int \mathcal{L} d^3x, \quad (4.21)$$

Variando com relação a  $N$ ,  $N^i$  e  $h_{ij}$  obtemos as equações de Einstein projetadas  $G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$ ,  $G_{\mu\nu}n^\mu h^\nu_\alpha = 0$  and  $G_{\mu\nu}h^\mu_\beta h^\nu_\alpha = 0$ , respectivamente.

Vamos construir o hamiltoniano da TRG. Os momentos canônicos conjugados a  $N$  e  $N^i$  são vínculos, já que a densidade lagrangeana (4.20) não depende de  $\partial_0 N$  e  $\partial_0 N^i$ :

$$\Pi_i = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 N^i)} \approx 0 \quad (4.22)$$

$$\Pi = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 N)} \approx 0 \quad (4.23)$$

A TRG é portanto uma teoria com vínculos e por isso será estudada com o formalismo de Dirac [39, 63]. Os vínculos (4.22) (4.23) são chamados ‘primários’. Os momentos canonicamente conjugados a  $h^{ij}$  estão dados por:

$$\Pi_{ij} = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t h^{ij})} = -h^{1/2}(K_{ij} - h_{ij}K). \quad (4.24)$$

A densidade hamiltoniana será:  $\mathcal{H}_c = \Pi_{ij} \partial_t h^{ij} - \mathcal{L}$ , e o hamiltoniano se escreve como

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x \mathcal{H}_c \\ &= \int d^3x (N\mathcal{H} + N_j \mathcal{H}^j), \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde

$$\mathcal{H} = \kappa G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - \frac{1}{\kappa} h^{1/2} R^{(3)}, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{H}^j = -2D_i \Pi^{ij}, \quad (4.27)$$

e

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-1/2} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}), \quad (4.28)$$

esta chamada de supermétrica ou métrica de DeWitt. Sua inversa  $G^{ijkl}$  está dada por

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2} h^{1/2} (h^{ik} h^{jl} + h^{il} h^{jk} - 2h^{ij} h^{kl}), \quad (4.29)$$

de modo que  $(G_{ijkl} G^{ijab} = \delta_{kl}^{ab})$ .

A densidade hamiltoniana total se obtém acrescentando os vínculos (4.22) e (4.23) por meio de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^\mu$ :

$$\mathcal{H}_T = N\mathcal{H} + N_j \mathcal{H}^j + \lambda^\mu \Pi_\mu \quad (4.30)$$

Para ter uma teoria consistente, os vínculos primários devem se conservar no tempo:  $\dot{\Pi}_\mu = \{\Pi_\mu, \mathcal{H}_c\} = 0$ . Daqui temos que as quantidades (4.26) e (4.27) devem ser fracamente zero:

$$\mathcal{H} = \kappa G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - \frac{1}{\kappa} h^{1/2} R^{(3)} \approx 0 \quad (4.31)$$

$$\mathcal{H}^j = -2D_i \Pi^{ij} \approx 0. \quad (4.32)$$

Estes são chamados de vínculo super-hamiltoniano e vínculo super-momento respectivamente, e são vínculos secundários. Sua conservação no tempo não conduz a novos vínculos. Já que  $N$  e  $N^i$  não têm dinâmica e aparecem no hamiltoniano total multiplicando vínculos secundários, então podem ser interpretados como multiplicadores de

Lagrange destes vínculos, podendo ser eliminados do espaço de fase da teoria [63]. Portanto o hamiltoniano da TRG no vácuo será:

$$H_{GR} = \int d^3x (N\mathcal{H} + N_j\mathcal{H}^j). \quad (4.33)$$

Estes vínculos secundários são de primeira classe: eles possuem parênteses de Poisson nulos entre eles. A conjectura de Dirac (provada em [64]) estabelece que todos os vínculos de primeira classe são geradores de transformações de gauge. Para os vínculos super-hamiltoniano e super-momento pode-se mostrar que:

$$\delta h_{ij}(x) = \{h_{ij}(x), \int d^3y \xi^k(y) \mathcal{H}_k(y)\} = D_j \xi_i(x) + D_i \xi_j(x) = \mathcal{L}_\xi h_{ij}, \quad (4.34)$$

$$\delta h_{ij}(x) = \{h_{ij}(x), \int d^3y \zeta(y) \mathcal{H}(y)\} = -2\zeta(x) K_{ij}(x) = \zeta(x) \mathcal{L}_n h_{ij}, \quad (4.35)$$

onde  $\mathcal{L}_\xi$  é a derivada de Lie ao longo do vetor infinitesimal tipo-espaço  $\xi$  e  $\mathcal{L}_n$  é a derivada de Lie ao longo da direção ortogonal à hipersuperfície tipo-espaço com métrica  $h_{ij}$ . a função  $\zeta(x)$  é infinitesimal. Temos um resultado análogo para os momentos  $\Pi_{ij}$ . Então o vínculo super-momento é o gerador das transformações espaciais de coordenadas e o vínculo super-hamiltoniano é o gerador de reparametrizações no tempo, as quais são as transformações de calibre da teoria. Podemos ver também da (4.35) que o vínculo super-hamiltoniano determina a dinâmica da teoria. Variando  $H_{GR}$  com relação a  $N$  e  $N^i$  obtem-se os vínculos  $\mathcal{H} = 0$  e  $\mathcal{H}^i = 0$ , que são as equações de Einstein  $G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 0$  e  $G_{\mu\nu} n^\mu h^\nu_\alpha = 0$ , respectivamente. A equação de evolução para  $h^{ij}$  dá a definição de  $\Pi_{ij}$  mostrada em (4.24), a qual combinada com a equação de evolução para  $\Pi_{ij}$  permite obter a equação de Einstein  $G_{\mu\nu} h^\mu_\beta h^\nu_\alpha = 0$ . Vemos que as equações de Einstein no vácuo são



obtidas partindo de um espaço de fases dado por todas as métricas  $h^{ij}(x)$  possíveis das hipersuperfícies e seus momentos canonicamente conjugados  $\Pi_{ij}(x)$ , o que significa que o espaço de configuração da teoria é composto por todas as  $h^{ij}(x)$  possíveis. Um espaço-tempo que seja solução particular das equações de Einstein, pode ser visualizado como uma trajetória no espaço de todas as  $h^{ij}(x)$ . O hamiltoniano (4.33) resulta igual a zero, como no caso mostrado no capítulo anterior, fato característico das teorias invariantes por reparametrização temporal.

A seguir vamos quantizar a TRG com um campo escalar minimamente acoplado e com um potencial arbitrário. Todos os resultados que encontramos serão essencialmente os mesmos para qualquer campo que esteja acoplado com a métrica e não com as suas derivadas. O hamiltoniano neste caso será dado por:

$$H = \int d^3x (N\mathcal{H} + N^j\mathcal{H}_j) \quad (4.36)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \kappa G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} + \frac{1}{2}h^{-1/2}\Pi_\phi^2 + \\ & + h^{1/2}\left[-\kappa^{-1}(R^{(3)} - 2\Lambda) + \frac{1}{2}h^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + U(\phi)\right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\mathcal{H}_j = -2D_i\Pi_j^i + \Pi_\phi\partial_j\phi. \quad (4.38)$$

Nestas equações  $h_{ij}$  é a métrica das 3-hipersuperfícies espaciais fechadas, e  $\Pi^{ij}$  são os momentos canonicamente conjugados, dados como vimos, por:

$$\Pi^{ij} = -h^{1/2}(K^{ij} - h^{ij}K) = G^{ijkl}(\dot{h}_{kl} - D_kN_l - D_lN_k), \quad (4.39)$$

O momento canônico do campo escalar é

$$\Pi_\phi = \frac{h^{1/2}}{N} \left( \dot{\phi} - N^i \partial_i \phi \right). \quad (4.40)$$

A 4-métrica clássica

$$ds^2 = -(N^2 - N^i N_i) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j \quad (4.41)$$

e o campo escalar, que são soluções das equações de Einstein, podem ser obtidas por meio das equações de Hamilton

$$\dot{h}_{ij} = \{h_{ij}, H\}, \quad (4.42)$$

$$\dot{\Pi}^{ij} = \{\Pi^{ij}, H\}, \quad (4.43)$$

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\}, \quad (4.44)$$

$$\dot{\Pi}_\phi = \{\Pi_\phi, H\}, \quad (4.45)$$

para alguma escolha de  $N$  e  $N^i$ , e impondo condições iniciais compatíveis com os vínculos

$$\mathcal{H} \approx 0, \quad (4.46)$$

$$\mathcal{H}_i \approx 0. \quad (4.47)$$

Uma característica do hamiltoniano da TRG é que as 4-métricas (4.41) construídas dessa forma, com as mesmas condições iniciais, descrevem a mesma 4-geometria para qualquer escolha de  $N$  e  $N^i$ .

Sejam  $x, x'$  dois pontos na hipersuperfície  $t = cte$ . Os vínculos satisfazem também a seguinte álgebra

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\} &= \mathcal{H}^i(x) \partial_i \delta^3(x, x') - \mathcal{H}^i(x') \partial_i \delta^3(x', x), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(x')\} &= \mathcal{H}(x) \partial_i \delta^3(x, x'), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(x')\} &= \mathcal{H}_i(x) \partial_j \delta^3(x, x') - \mathcal{H}_j(x') \partial_i \delta^3(x', x).\end{aligned}\tag{4.48}$$

Como já dissemos no capítulo 3, esta álgebra foi obtida primeiramente por Dirac no caso de teoria de campos parametrizadas em espaço-tempo de Minkowski. No caso da TRG, a álgebra (4.48) foi obtida por DeWitt calculando diretamente de (4.37)(4.38)[45]. Os super-momentos que aparecem nos lados direitos de (4.48) têm o índice contravariante subidos por meio da métrica espacial  $h_{ij}$  como no capítulo precedente. Como já vimos, Teitelboim provou que esta álgebra é independente da forma dos vínculos no caso da teoria de campos e que ela é, na verdade, um padrão que segue a dinâmica das deformações de uma hipersuperfície num espaço riemanniano de métrica não degenerada. Tanto a TRG quanto a teoria de campos parametrizadas, apresentam este padrão por tratarem de espaços-tempos com métrica não degenerada [40].

## 4.2 Quantização canônica

Agora vamos quantizar este sistema físico com vínculos seguindo o formalismo de Dirac. Os vínculos se transformam em condições sobre os estados possíveis do sistema quântico, resultando nas seguintes equações quânticas

$$\hat{\mathcal{H}}_i | \Psi > = 0, \quad (4.49)$$

$$\hat{\mathcal{H}} | \Psi > = 0. \quad (4.50)$$

Na representação da métrica e do campo, a primeira equação é

$$-2h_{li}D_j \frac{\delta \Psi(h_{ij}, \phi)}{\delta h_{lj}} + \frac{\delta \Psi(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi} \partial_i \phi = 0, \quad (4.51)$$

que implica ser o funcional de onda  $\Psi$  um invariante sob transformações de coordenadas espaciais.

A segunda é a equação de Wheeler-DeWitt [65][45]. Se a escrevemos de maneira não regulada em representação de coordenadas temos

$$\left\{ -\hbar^2 \left[ \kappa G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} + \frac{1}{2} h^{-1/2} \frac{\delta^2}{\delta \phi^2} \right] + V \right\} \Psi(h_{ij}, \phi) = 0, \quad (4.52)$$

onde  $V$  é o potencial clássico dado por

$$V = h^{1/2} \left[ -\kappa^{-1} (R^{(3)} - 2\Lambda) + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi + U(\phi) \right]. \quad (4.53)$$

Esta equação envolve produtos de operadores locais no mesmo ponto do espaço; então deve ser regularizada. Depois de ter feito isso devemos encontrar um ordenamento que deixe a teoria livre de anomalias, no sentido que os comutadores dos vínculos (sendo agora operadores) fechem na mesma álgebra que os parênteses de Poisson clássicos (4.48). Portanto, a equação (4.52) é apenas uma equação formal, que deve ser usada com cuidado [29, 30, 31].

## Capítulo 5

# Geometrodinâmica Quântica na Visão de Bohm-de Broglie

### 5.1 A perspectiva de Hamilton-Jacobi

Vamos ver agora como a interpretação de Bohm-de Broglie se aplica às soluções das Eqs. (4.49) e (4.50) na representação da métrica e do campo. Primeiro escreveremos o funcional de onda em forma polar  $\Psi = A \exp(iS/\hbar)$ , onde  $A$  e  $S$  são funcionais de  $h_{ij}$  e  $\phi$ . Substituindo na Eq. (4.51), obtemos duas equações, as quais estabelecem que  $A$  e  $S$  são invariantes sob transformações gerais de coordenadas espaciais:

$$-2h_{li}D_j \frac{\delta S(h_{ij}, \phi)}{\delta h_{lj}} + \frac{\delta S(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi} \partial_i \phi = 0, \quad (5.1)$$

$$-2h_{li}D_j \frac{\delta A(h_{ij}, \phi)}{\delta h_{lj}} + \frac{\delta A(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi} \partial_i \phi = 0. \quad (5.2)$$

Exatamente como no capítulo 3, as duas equações que obtemos para  $A$  e  $S$  ao substituirmos  $\Psi = A \exp(iS/\hbar)$  na Eq. (4.50) dependerão do ordenamento escolhido. No entanto, seja como for, uma das equações será

$$\kappa G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + \frac{1}{2} h^{-1/2} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + V + \mathcal{Q} = 0, \quad (5.3)$$

onde  $V$  é o potencial clássico dado na Eq. (4.53). Ao contrário dos outros termos na Eq. (5.3), os quais já estão bem definidos, a forma precisa de  $\mathcal{Q}$  depende da regularização e do ordenamento escolhido na equação de Wheeler-DeWitt. Na forma não regulada dada na Eq. (4.52),  $\mathcal{Q}$  é dado por

$$\mathcal{Q} = -\hbar^2 \frac{1}{A} \left( \kappa G_{ijkl} \frac{\delta^2 A}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} + \frac{h^{-1/2}}{2} \frac{\delta^2 A}{\delta \phi^2} \right). \quad (5.4)$$

A outra equação que aparece neste caso é

$$\kappa G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left( A^2 \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right) + \frac{1}{2} h^{-1/2} \frac{\delta}{\delta \phi} \left( A^2 \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) = 0. \quad (5.5)$$

Vamos implementar agora a interpretação de Bohm-de Broglie da gravitação quântica canônica. Primeiramente, notamos que as Eqs. (5.1) e (5.3), que são validas independentemente do ordenamento da equação Wheeler-DeWitt, são como as equações de Hamilton-Jacobi para a TRG, acrescentadas de um termo extra  $\mathcal{Q}$  no caso da Eq. (5.3), o qual chamaremos de potencial quântico. Por analogia com os casos de uma partícula não relativística e de uma teoria de campos em espaço-tempo plano, postularemos que a 3-métrica das hipersuperfícies espaciais, o campo escalar, e os momentos canonicamente conjugados sempre existem, independentemente da observação, e que a evolução da 3-métrica e do campo escalar pode ser obtida das relações guia

$$\Pi^{ij} = \frac{\delta S(h_{ab}, \phi)}{\delta h_{ij}}, \quad (5.6)$$

$$\Pi_\phi = \frac{\delta S(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi}, \quad (5.7)$$

com  $\Pi^{ij}$  e  $\Pi_\phi$  dados pelas Eqs. (4.39) e (4.40), respectivamente. Como antes, estas são equações diferenciais de primeira ordem que podem ser integradas para produzir a 3-métrica e o campo escalar para todo valor do parâmetro  $t$ . Estas soluções dependem dos valores iniciais da 3-métrica e do campo escalar em alguma hipersuperfície inicial. A evolução desses campos será diferente, claro, da clássica devido à presença do potencial quântico  $\mathcal{Q}$  na Eq. (5.3). O limite clássico é, outra vez, conceitualmente simples: está dado pela região onde o potencial quântico  $\mathcal{Q}$  torna-se desprezível com respeito à energia clássica.

A única e importante diferença com os casos anteriores de uma partícula não relativística e uma teoria de campos em espaço-tempo plano é o fato de que as equivalentes das Eqs. (2.3) e (2.7) para gravitação quântica canônica, que no ordenamento ingênuo é a Eq. (5.5), não pode ser interpretada como uma equação de continuidade para uma densidade de probabilidade  $A^2$  por causa da natureza hiperbólica da métrica de DeWitt  $G_{ijkl}$ . Contudo, embora sem uma noção de probabilidade, a qual neste caso poderia significar a densidade de probabilidade de distribuição para valores iniciais da 3-métrica e o campo escalar numa hipersuperfície inicial, podemos extrair muita informação da Eq. (5.3) qualquer que seja o potencial quântico  $\mathcal{Q}$ , como veremos agora. Depois de obter estes resultados vamos voltar à questão da probabilidade no último capítulo.

Primeiro notamos que, qualquer que seja a forma do potencial quântico  $\mathcal{Q}$ , ele deve ser uma densidade escalar de peso 1. Isto sai da equação de Hamilton-Jacobi (5.3). Desta equação podemos expresar  $\mathcal{Q}$  como

$$\mathcal{Q} = -\kappa G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} - \frac{1}{2} h^{-1/2} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 - V. \quad (5.8)$$

Sendo  $S$  é um invariante perante transformações gerais de coordenadas (veja Eq. (5.1)), então  $\delta S/\delta h_{ij}$  e  $\delta S/\delta \phi$  devem ser densidades tensoriais, de ordem dois e escalar, ambas de peso 1, respectivamente. Quando o seu produto é contraído com  $G_{ijkl}$  e multiplicado por  $h^{-1/2}$ , respectivamente, eles formam uma densidade escalar de peso 1, como também é  $V$ . Portanto,  $\mathcal{Q}$  é uma densidade escalar de peso 1. Além disso,  $\mathcal{Q}$  só deve depender de  $h_{ij}$  e  $\phi$  já que ele é oriundo do funcional de onda que por sua vez só depende destas variáveis. Por outro lado pode ser não local (mostramos um exemplo no apêndice B), isto é, dependente de integrais dos campos sobre todo o espaço.

Agora vamos investigar o seguinte problema importante. Das relações guia (5.6) e (5.7) obtemos as seguintes equações diferenciais em derivadas parciais:

$$\dot{h}_{ij} = 2NG_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + D_i N_j + D_j N_i, \quad (5.9)$$

e

$$\dot{\phi} = Nh^{-1/2} \frac{\delta S}{\delta \phi} + N^i \partial_i \phi, \quad (5.10)$$

A questão é, dadas certas condições iniciais para a 3-métrica e para o campo escalar, que tipo de estrutura vamos obter ao integrar estas equações no parâmetro  $t$ ? Será que esta estrutura forma uma geometria 4-dimensional com um campo escalar para qualquer escolha das funções lapso e deslocamento? Fica claro que se o funcional  $S$  for solução da equação de Hamilton-Jacobi clássica, que não contem o termo  $\mathcal{Q}$ , então a resposta seria afirmativa já que estaríamos no caso da TRG. Mas  $S$  é uma solução da equação



de Hamilton-Jacobi *modificada* (5.3), e então não podemos garantir que isso continuará sendo verdadeiro. Podemos obter uma estrutura completamente diferente devido aos efeitos quânticos dados pelo termo correspondente ao potencial quântico na Eq. (5.3).

Para responder a esta questão, vamos mudar da visão de Hamilton-Jacobi da geometrodinâmica quântica para uma visão hamiltoniana. Vamos fazer isto porque existem resultados poderosos na geometrodinâmica que foram obtidos no formalismo hamiltoniano [25] [40]. Vamos construir um formalismo hamiltoniano consistente com as relações guia (5.6) e (5.7), exatamente como fizemos no capítulo 3. Ele produz as trajetórias bohmianas (5.9) e (5.10) sempre que as relações guia sejam satisfeitas inicialmente. Uma vez que tenhamos o hamiltoniano, podemos fazer uso de resultados bem conhecidos da literatura e assim obter resultados poderosos acerca da visão Bohm-de Broglie da geometrodinâmica quântica.

## 5.2 A perspectiva hamiltoniana

Examinando as Eqs. (5.1) e (5.3), podemos facilmente esperar que o hamiltoniano que gera as trajetórias bohmianas, uma vez satisfeitas inicialmente as relações guia (5.6) e (5.7), deva ser

$$H_Q = \int d^3x \left[ N\mathcal{H}_Q + N^i\mathcal{H}_i \right] \quad (5.11)$$

onde definimos

$$\mathcal{H}_Q \equiv \mathcal{H} + \mathcal{Q}. \quad (5.12)$$

As quantidades  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}_i$  são os vínculos super-hamiltoniano e super-momento da TRG dados pelas Eqs. (4.37) e (4.38). Vamos mostrar isto. De fato, as relações guia (5.6) e (5.7) são consistentes com os vínculos  $\mathcal{H}_Q \approx 0$  e  $\mathcal{H}_i \approx 0$  já que  $S$  satisfaz (5.1) e (5.3). Além disso, são conservados na evolução hamiltoniana dada por (5.11), analogamente ao que acontece no capítulo 3. Vejamos isto com algum detalhe.

Escrevamos Eqs. (5.6) e (5.7) de uma forma levemente diferente, definindo

$$\Phi^{ij} \equiv \Pi^{ij} - \frac{\delta S(h_{ab}, \phi)}{\delta h_{ij}} \approx 0, \quad (5.13)$$

e

$$\Phi_\phi \equiv \Pi_\phi - \frac{\delta S(h_{ij}, \phi)}{\delta \phi} \approx 0. \quad (5.14)$$

Calculemos agora  $\{\Phi^{ij}(x), \mathcal{H}_Q(x')\}$ ,  $\{\Phi_\phi(x), \mathcal{H}_Q(x')\}$ ,  $\{\Phi^{ab}(x), \mathcal{H}_i(x')\}$  e  $\{\Phi_\phi(x), \mathcal{H}_i(x')\}$ , e verifiquemos se as relações guia (5.13) e (5.14), visualizadas agora como vínculos, são conservadas pelo hamiltoniano  $H_Q$ .

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_Q(x), \Phi^{ij}(x')\} &= \kappa \frac{\delta G_{abcd}}{\delta h'_{ij}} \Pi^{ab} \Pi^{cd} + \frac{1}{2} \frac{\delta h^{-1/2}}{\delta h'_{ij}} \Pi_\phi^2 + \frac{\delta(V + \mathcal{Q})}{\delta h'_{ij}} \\ &\quad + 2\kappa G_{abcd} \Pi^{ab} \frac{\delta^2 S}{\delta h_{cd} \delta h'_{ij}} + h^{-\frac{1}{2}} \Pi_\phi \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta h'_{ij}} \\ &= \kappa \frac{\delta G_{abcd}}{\delta h'_{ij}} \left( \Phi^{ab} \Phi^{cd} + 2\Phi^{ab} \frac{\delta S}{\delta h_{cd}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\delta h^{-\frac{1}{2}}}{\delta h'_{ij}} \left( \Phi_\phi^2 + 2\Phi_\phi \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) \\ &\quad + 2\kappa G_{abcd} \Phi^{ab} \frac{\delta^2 S}{\delta h_{cd} \delta h'_{ij}} + h^{-\frac{1}{2}} \Phi_\phi \frac{\delta S}{\delta \phi \delta h'_{ij}} \\ &\quad + \frac{\delta}{\delta h'_{ij}} \left[ \kappa G_{abcd} \frac{\delta S}{\delta h_{ab}} \frac{\delta S}{\delta h_{cd}} + \frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + V + \mathcal{Q} \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde a linha significa avaliar em  $x'$ . O último termo é zero por causa da Eq.(5.3), e assim obtemos

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_Q(x), \Phi^{ij}(x')\} = & \left\{ \kappa \left[ -\frac{1}{2} G_{abcd} h^{ij} \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} (4\delta_{ac}^{ij} h_{bd} - \delta_{ab}^{ij} h_{cd} - \delta_{cd}^{ij} h_{ab}) \left. \right] \left( \Phi^{ab} \Phi^{cd} + 2\Phi^{ab} \frac{\delta S}{\delta h_{cd}} \right) \\
& - \frac{1}{4} h^{-\frac{1}{2}} h^{ij} \left( \Phi_\phi^2 + 2\Phi_\phi \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) \left. \right\} \delta^3(x, x') \\
& + 2\kappa G_{abcd} \frac{\delta^2 S}{\delta h_{cd} \delta h'_{ij}} \Phi^{ab} + h^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta h'_{ij}} \Phi_\phi \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Da mesma maneira podemos provar que

$$\{\mathcal{H}_Q(x), \Phi_\phi(x')\} = 2\kappa G_{abcd} \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ab} \delta \phi'} \Phi^{cd} + h^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi'} \Phi_\phi \approx 0, \tag{5.17}$$

onde utilizamos o fato de a derivada funcional da Eq. (5.3) com respeito a  $\phi$  é zero.

Para os parênteses de Poisson que envolvem o vínculo super-momento, sendo  $S$  um invariante já que verifica a Eq. (5.1), então  $\Phi^{ij}$  e  $\Phi_\phi$  são uma densidade tensorial de segundo ordem e uma densidade escalar, respectivamente, ambas de peso 1. Dado que  $\mathcal{H}_i$  é o gerador de transformações espaciais de coordenadas, temos

$$\{\mathcal{H}_i(x), \Phi^{ab}(x')\} = -2\delta_{ci}^{ab} \Phi^{cj}(x') \partial_j \delta^3(x, x') + \Phi^{ab}(x) \partial_i \delta^3(x, x') \approx 0, \tag{5.18}$$

e

$$\{\mathcal{H}_i(x), \Phi_\phi(x')\} = \Phi_\phi \partial_i \delta^3(x, x') \approx 0 \tag{5.19}$$

Combinando estes resultados obtemos

$$\dot{\Phi}^{ij} = \{\Phi^{ij}, H_Q\} \approx 0, \tag{5.20}$$

e

$$\dot{\Phi}_\phi = \{\Phi_\phi, H_Q\} \approx 0. \quad (5.21)$$

Ademais, os parênteses de Poisson entre (5.13) e (5.14) são zero. Finalmente, as definições dos momentos em termos das velocidades continuam sendo as mesmas do caso clássico já que o potencial quântico  $\mathcal{Q}$  não depende dos momentos:

$$\dot{h}_{ij} = \{h_{ij}, H_Q\} = \{h_{ij}, H\}, \quad (5.22)$$

e

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_Q\} = \{\phi, H\}. \quad (5.23)$$

recuperando as Eqs.(5.9) e (5.10).

Temos agora um hamiltoniano  $H_Q$ , que gera as trajetórias bohmianas uma vez que as relações guia (5.6) e (5.7) são impostas inicialmente. No que segue, podemos investigar se a evolução dos campos dada por  $H_Q$  forma uma 4-geometria semelhante ao caso da geometrodinâmica clássica. Primeiro lembremos o resultado obtido por Claudio Teitelboim [40] que usamos no capítulo 3. Neste trabalho, ele mostra que se as configurações de 3-geometrias e campos definidas numa hipersuperfície são evoluídas por um certo hamiltoniano da forma

$$\bar{H} = \int d^3x (N\bar{\mathcal{H}} + N^i\bar{\mathcal{H}}_i), \quad (5.24)$$

e se esta evolução pode ser vista como o ‘movimento’ de um corte 3-dimensional num espaço-tempo 4-dimensional (as 3-geometrias podem ser embutidas numa 4-geometria), então os vínculos  $\bar{\mathcal{H}} \approx 0$  e  $\bar{\mathcal{H}}_i \approx 0$  devem satisfazer a álgebra de Dirac

$$\{\bar{\mathcal{H}}(x), \bar{\mathcal{H}}(x')\} = -\epsilon[\bar{\mathcal{H}}^i(x)\partial_i\delta^3(x', x) - \bar{\mathcal{H}}^i(x')\partial_i\delta^3(x', x)], \quad (5.25)$$

$$\{\bar{\mathcal{H}}_i(x), \bar{\mathcal{H}}(x')\} = \bar{\mathcal{H}}(x)\partial_i\delta^3(x, x'), \quad (5.26)$$

$$\{\bar{\mathcal{H}}_i(x), \bar{\mathcal{H}}_j(x')\} = \bar{\mathcal{H}}_i(x)\partial_j\delta^3(x, x') - \bar{\mathcal{H}}_j(x')\partial_i\delta^3(x', x). \quad (5.27)$$

A constante  $\epsilon$  na (5.25) pode ser  $\pm 1$  dependendo se a 4-geometria na qual as 3-geometrias estão embutidas é euclídeana ( $\epsilon = 1$ ) ou hiperbólica ( $\epsilon = -1$ ). Estas são as condições para a existência de um espaço-tempo de métrica não degenerada. A álgebra acima é a mesma que (4.48) da TRG se escolhermos  $\epsilon = -1$ .

O hamiltoniano (5.11) é diferente do hamiltoniano da TRG somente devido a presença do potencial quântico  $\mathcal{Q}$  em  $\mathcal{H}_Q$ . O colchete de Poisson  $\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(x')\}$  satisfaz a Eq. (5.27) já que  $\mathcal{H}_i$  de  $H_Q$  definido na Eq. (5.11) é o mesmo que na TRG. Da mesma forma  $\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_Q(x')\}$  satisfaz Eq. (5.26) pois  $\mathcal{H}_i$  é o gerador de transformações espaciais de coordenadas, e como  $\mathcal{H}_Q$  é uma densidade escalar de peso 1 (lembrar que  $\mathcal{Q}$  também é uma densidade escalar de peso 1), então ele deve satisfazer esta relação de colchetes de Poisson com  $\mathcal{H}_i$ . O que resta ser verificado, como no capítulo 3, é se o colchete de Poisson  $\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\}$  fecha como na Eq. (5.25).

Agora lembramos um resultado importante estabelecido por Hojman, Kuchař, e Teitelboim [25]. Neste trabalho mostra-se que caso um super-hamiltoniano geral  $\bar{\mathcal{H}}$  satisfaça a Eq. (5.25), seja uma densidade escalar de peso 1 cujos graus de liberdade geométricos sejam dados somente pela 3-métrica  $h_{ij}$  e seus momentos canonicamente conjugados, e contenham somente potências pares e nenhum termo não-local nos momentos (estes dois últimos requisitos, juntamente com os anteriores, são satisfeitos por  $\mathcal{H}_Q$  porque ele é

quadrático nos momentos e o potencial quântico não contém nenhum termo não-local nos momentos), então  $\bar{\mathcal{H}}$  deve ter a seguinte forma:

$$\bar{\mathcal{H}} = \kappa G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} + \frac{1}{2} h^{-1/2} \pi_\phi^2 + V_G, \quad (5.28)$$

onde

$$V_G \equiv -\epsilon h^{1/2} \left[ -\kappa^{-1} (R^{(3)} - 2\bar{\Lambda}) + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi + \bar{U}(\phi) \right]. \quad (5.29)$$

Com este resultado podemos agora estabelecer dois possíveis cenários para a geometrodinâmica quântica na interpretação de Bohm-de Broglie, dependendo da forma do potencial quântico. Eles serão apresentados no próximo capítulo

### 5.3 Consistência da teoria

Finalmente, vamos mostrar a que os parênteses de Poisson  $\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\}$  são sempre fracamente iguais a zero independentemente do potencial quântico e, portanto, a geometrodinâmica quântica na visão de Bohm-de Broglie é consistente. Temos

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\} = & \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\} - 2\kappa G_{abcd}(x) \Pi^{cd}(x) \frac{\delta \mathcal{Q}(x')}{\delta h_{ab}(x)} \\ & + 2\kappa G_{abcd}(x') \Pi^{cd}(x') \frac{\delta \mathcal{Q}(x)}{\delta h_{ab}(x')} - h^{-1/2}(x) \Pi_\phi(x) \frac{\delta \mathcal{Q}(x')}{\delta \phi(x)} + h^{-1/2}(x') \Pi_\phi(x') \frac{\delta \mathcal{Q}(x)}{\delta \phi(x')}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Nesta última equação vamos substituir o potencial quântico que sai da equação de Hamilton Jacobi modificada Eq.(5.3):

$$\mathcal{Q} = -\kappa G_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} - \frac{1}{2} h^{-1/2} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 - V. \quad (5.31)$$

Então,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\} = & \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\} + 2\kappa G_{abcd}(x) \Pi^{cd}(x) \frac{\delta V(x')}{\delta h_{ab}(x)} + h^{-1/2}(x) \Pi \frac{\delta V(x')}{\delta \phi(x)} \\ & - \kappa G_{abcd}(x') \Pi^{cd}(x') \frac{\delta V(x)}{\delta h_{ab}(x')} - h^{-1/2}(x') \Pi \frac{\delta V(x)}{\delta \phi(x')} \\ & + 4\kappa^2 G_{abcd}(x) \Pi^{cd}(x) \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ab}(x) h_{ij}(x')} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}(x')} G_{ijkl}(x') \\ & + 2\kappa G_{abcd}(x) \Pi^{cd}(x) h^{-1/2}(x') \frac{\delta S}{\delta \phi(x')} \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ab}(x) \delta \phi(x')} \\ & + 2\kappa h^{-1/2}(x) \Pi_\phi(x) G_{ijkl}(x') \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta h_{ij}(x')} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}(x')} \\ & + h^{-1/2}(x) h^{-1/2}(x') \Pi_\phi(x) \frac{\delta S}{\delta \phi(x')} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \phi(x')} - (x \longleftrightarrow x'), \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde  $(x \longleftrightarrow x')$  significa a mesma expressão, mas com  $x$  e  $x'$  trocados entre si. No lado direito desta equação foram cancelados os termos proporcionais a  $\delta^3(x', x)$  (estes termos vêm das derivadas funcionais  $\frac{\delta G_{ijkl}(x')}{\delta h_{ab}(x)}$  e  $\frac{\delta h^{-1/2}(x')}{\delta h_{ab}(x)}$ ) com os que vem do termo  $-(\leftrightarrow)$ . Os quatro termos que seguem depois de  $\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\}$  vão produzir exatamente  $-\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\}$  e portanto se cancelam. Substituindo agora os momentos expressos segundo as relações guia de Bohm,

$$\Pi^{ij}(x) = \Phi^{ij}(x) + \frac{\delta S}{\delta h_{ij}(x)}, \quad (5.33)$$

$$\Pi_\phi(x) = \Phi_\phi(x) + \frac{\delta S}{\delta \phi(x)}, \quad (5.34)$$

é simples de ver, utilizando as propriedades de simetria da  $G_{ijkl}$ , que todos os termos que não são fracamente zero se cancelam em pares. Finalmente temos

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\} = & +4\kappa^2 G_{abcd}(x) \Phi^{cd}(x) \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ab}(x) h_{ij}(x')} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}(x')} G_{ijkl}(x') \\
& +2\kappa G_{abcd}(x) \Phi^{cd}(x) h^{-1/2}(x') \frac{\delta S}{\delta \phi(x')} \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ab}(x) \delta \phi(x')} \\
& +2\kappa h^{-1/2}(x) \Phi_\phi(x) G_{ijkl}(x') \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta h_{ij}(x')} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}(x')} \\
& +h^{-1/2}(x) h^{-1/2}(x') \Phi_\phi(x) \frac{\delta S}{\delta \phi(x')} \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \phi(x')} - (x \longleftrightarrow x'). \quad (5.35)
\end{aligned}$$

O lado direito desta equação é fracamente zero devido as relações de Bohm e, portanto

$$\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\} \approx 0 \quad (5.36)$$

Isto prova a consistência. Note que foi muito importante utilizar as relações guia para fechar a álgebra. Isto significa que a evolução hamiltoniana com o potencial quântico (5.31) é consistente só quando restrita às trajetórias bohmianas. Para outras trajetórias é inconsistente. Assim, quando nos restringimos à trajetórias bohmianas, uma álgebra que não fecha em geral pode fechar, como vimos acima. Isto é um ponto importante na interpretação de Bohm-de Broglie da cosmologia quântica, que algumas vezes não é notado. Resta saber em que casos a álgebra formada é a álgebra de Dirac.



# Capítulo 6

## Cenários Possíveis

O potencial quântico vai determinar se os colchetes de Poisson dos vínculos fecham segundo a álgebra de Dirac ou segundo uma outra diferente. Vimos que o colchete de Poisson relevante para esta determinação será aquele do super-hamiltoniano com ele mesmo,  $\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\}$ , já que os outros continuam a fechar da mesma forma que no caso clássico. Deste modo, o potencial quântico permite definir os seguintes cenários cosmológicos:

### 6.1 A geometrodinâmica quântica gera uma 4-geometria não degenerada

Neste caso, o colchete de Poisson  $\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\}$  deve satisfazer a Eq. (5.25). Então, segundo os resultados de [25],  $\mathcal{Q}$  deve ser tal que  $V + \mathcal{Q} = V_G$  com  $V_G$  dado por (5.29) obtendo-se:

$$\mathcal{Q} = -h^{1/2} \left[ (\epsilon + 1) \left( -\kappa^{-1} R^{(3)} + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \right) + \frac{2}{\kappa} (\epsilon \bar{\Lambda} + \Lambda) + \epsilon \bar{U}(\phi) + U(\phi) \right]. \quad (6.1)$$

Temos então duas possibilidades:

### 6.1.1 O espaço tempo formado é hiperbólico ( $\epsilon = -1$ )

Neste caso  $\mathcal{Q}$  é

$$\mathcal{Q} = -h^{1/2} \left[ \frac{2}{\kappa} (-\bar{\Lambda} + \Lambda) - \bar{U}(\phi) + U(\phi) \right]. \quad (6.2)$$

Então  $\mathcal{Q}$  é tipo um potencial clássico. Seu efeito é renormalizar a constante cosmológica e o potencial clássico do campo escalar. A Geometrodinâmica quântica é indistinguível da clássica. Não é preciso tomar o limite clássico  $\mathcal{Q} = 0$  porque  $V_G = V + \mathcal{Q}$  já descreve o Universo clássico em que vivemos.

### 6.1.2 O espaço-tempo formado é euclideo ( $\epsilon = 1$ )

Aqui temos que  $\mathcal{Q}$  resulta em

$$\mathcal{Q} = -h^{1/2} \left[ 2 \left( -\kappa^{-1} R^{(3)} + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \right) + \frac{2}{\kappa} (\bar{\Lambda} + \Lambda) + \bar{U}(\phi) + U(\phi) \right]. \quad (6.3)$$

Agora  $\mathcal{Q}$  não só renormaliza a constante cosmológica e o potencial clássico do campo escalar como também muda a assinatura do espaço-tempo. O potencial total  $V_G = V + \mathcal{Q}$  pode descrever alguma era do universo primordial quando tinha assinatura euclidea, mas não a era atual em que é hiperbólico. A transição entre essas duas fases deve acontecer numa hipersuperfície onde  $\mathcal{Q} = 0$ , o qual é o limite clássico.

Destas considerações podemos concluir que se existe um espaço-tempo quântico com características diferentes do clássico que observamos, então este deve ser euclideo. Em outras palavras, o único efeito quântico relevante que mantém a natureza não-degenerada da 4-geometria é a mudança da assinatura da geometria para euclidea. Os outros efeitos

quânticos ou são irrelevantes por serem indistinguíveis de efeitos clássicos ou quebram a estrutura de espaço-tempo. Estes resultados apontam na direção da Ref. [43].

## 6.2 A geometrodinâmica quântica gera uma 4-geometria degenerada

Neste caso, o colchete  $\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\}$  não satisfaz a Eq. (5.25) mas é fracamente zero numa outra forma. Vamos examinar alguns exemplos.

### 6.2.1 Soluções reais da equação de Wheeler-DeWitt

No caso de soluções reais da equação de Wheeler-DeWitt, que é uma equação real, a fase  $S$  é nula. Então, da Eq. (5.3), podemos ver que  $\mathcal{Q} = -V$ . Portanto, o super-hamiltoniano quântico (5.12) conterà apenas termos cinéticos, dando

$$\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\} = 0. \quad (6.4)$$

Esta é uma igualdade forte. Este caso tem relação com o limite da gravitação forte da TRG [67, 68, 69]. Se tomarmos o limite de constante gravitacional  $G$  grande (ou velocidade da luz  $c$  pequena, onde chegamos ao grupo de Carroll [32]), então o potencial no vínculo super-hamiltoniano da TRG pode ser desprezado e resulta um super-hamiltoniano contendo um termo cinético apenas. A interpretação de Bohm-de Broglie está nos dizendo que qualquer solução real da equação de Wheeler-DeWitt produz uma geometrodinâmica quântica que satisfaz precisamente este limite de gravitação forte. O limite clássico  $\mathcal{Q} = 0$  neste caso implica também em  $V = 0$ . Seria interessante investigar esta estrutura em profundidade.

### 6.2.2 Potenciais quânticos não locais

Um potencial quântico não-local qualquer quebra o espaço-tempo. Tomemos como exemplo um potencial da forma

$$\mathcal{Q} = \gamma V, \quad (6.5)$$

onde  $\gamma$  é uma função do funcional  $S$  (aqui aparece a não-localidade). No apêndice B mostraremos um funcional solução de um modelo de midisuperespaço que produz este tipo de potencial quântico.

Calculemos  $\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\}$ :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\} &= \{\mathcal{H}(x) + Q(x), \mathcal{H}(x') + Q(x')\} \\ &= \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\} + \{T(x), \mathcal{Q}(x')\} + \{\mathcal{Q}(x), T(x')\} \end{aligned}$$

onde  $T$  é o termo cinético do super-hamiltoniano quântico. Desenvolvendo os dois últimos termos temos

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\} &= \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\} + \gamma \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\} \\ &\quad - \frac{d\gamma}{dS} V(x') \left[ 2\kappa G_{klij}(x) \Pi^{ij}(x) \frac{\delta S}{\delta h_{kl}(x)} + h^{-\frac{1}{2}} \Pi_\phi(x) \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \right] \\ &\quad + \frac{d\gamma}{dS} V(x) \left[ 2\kappa G_{klij}(x') \Pi^{ij}(x') \frac{\delta S}{\delta h_{kl}(x')} + h^{-\frac{1}{2}} \Pi_\phi(x') \frac{\delta S}{\delta \phi(x')} \right] \\ &= (1 + \gamma) \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\} \\ &\quad - \frac{d\gamma}{dS} V(x') \left[ 2\mathcal{H}_Q(x) - 2\kappa G_{klij}(x) \Pi^{ij}(x) \left( \Pi^{kl}(x) - \frac{\delta S}{\delta h_{kl}(x)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h^{-\frac{1}{2}}\Pi_\phi(x)\left(\Pi_\phi(x) - \frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\right)\Big] \\
& + \frac{d\gamma}{dS}V(x)\left[2\mathcal{H}_Q(x') - 2\kappa G_{klij}(x')\Pi^{ij}(x')\left(\Pi^{kl}(x') - \frac{\delta S}{\delta h_{kl}(x')}\right)\right. \\
& \left. - h^{-\frac{1}{2}}\Pi_\phi(x')\left(\Pi_\phi(x') - \frac{\delta S}{\delta\phi(x')}\right)\right] \tag{6.6}
\end{aligned}$$

Fazendo uso da álgebra (4.48) e das definições (5.13) e (5.14) temos:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(x')\} &= (1 + \gamma)[\mathcal{H}^i(x)\partial_i\delta^3(x, x') - \mathcal{H}^i(x')\partial_i\delta^3(x', x)] \\
& - \frac{d\gamma}{dS}V(x')[2\mathcal{H}_Q(x) - 2\kappa G_{klij}(x)\Pi^{ij}(x)\Phi^{kl}(x) - h^{-\frac{1}{2}}\Pi_\phi(x)\Phi_\phi(x)] \\
& + \frac{d\gamma}{dS}V(x)[2\mathcal{H}_Q(x') - 2\kappa G_{klij}(x')\Pi^{ij}(x')\Phi^{kl}(x') - h^{-\frac{1}{2}}\Pi_\phi(x')\Phi_\phi(x')] \\
& \approx 0 \tag{6.7}
\end{aligned}$$

O segundo lado da última expressão é fracamente zero já que é uma combinação dos vínculos e das relações guia (5.13) e (5.14). Nos exemplos acima foram obtidas as ‘constantes de estrutura’ da álgebra que caracteriza a ‘pré-4-geometria’ gerada por  $H_Q$ , isto é, a estrutura de ”espuma” introduzida nos trabalhos de J. A. Wheeler [65, 66].

# Capítulo 7

## Discussão e Conclusões

Nesta tese estudamos a consistência e consequências da aplicação da interpretação de Bohm de Broglie, tanto em teorias quânticas de campos no espaço-tempo plano como em gravitação quântica. No primeiro caso, mostramos o resultado já conhecido, utilizando um novo método, que a descrição bohmiana quebra a invariância relativística de processos individuais mas mantém a invariância relativística estatística, ou seja, dos processos observáveis. Para a gravitação quântica, chega-se a um resultado análogo, embora não se possa afirmar nada do ponto de vista estatístico.

A interpretação de Bohm-de Broglie da cosmologia quântica canônica fornece uma imagem geometrodinâmica onde a evolução quântica bohmiana das 3-geometrias é sempre consistente e pode formar, dependendo do funcional de onda do Universo, ou uma 4-geometria não degenerada que se for não trivial tem que ser euclideana, ou uma 4-geometria degenerada, indicando a presença de campos de vetores especiais, e a quebra da estrutura de espaço-tempo como uma entidade única (numa ampla classe de possibilidades). Então, em geral, e sempre que o potencial quântico seja não local, o espaço-tempo é quebrado. As 3-geometrias evoluídas sob a influência do potencial quântico em geral

não vão se superpor para formar uma 4-geometria não degenerada, um espaço-tempo com a estrutura causal da relatividade. Isto já foi antecipado há algum tempo [66], mas aqui vemos a realização destas idéias concretamente.

As estruturas mais gerais formadas pela evolução bohmiana são 4-geometrias degeneradas com estruturas causais alternativas. Obtivemos estes resultados tomando um campo escalar de matéria com acoplamento mínimo como a fonte da gravitação, mas pode-se generalizar este resultado para qualquer fonte material com acoplamento sem derivadas com a métrica, como os campos de Yang-Mills.

Como foi mostrado nesta tese, uma 4-geometria não degenerada pode ser obtida somente se o potencial quântico tem a forma específica (6.1). Neste caso, o único efeito quântico relevante será a mudança da assinatura do espaço-tempo, fato que aponta em direção às idéias de Hawking. Podemos resumir dizendo que os espaços-tempos quânticos não triviais devem ser euclidianos.

No caso de 4-geometrias degeneradas, mostramos que qualquer solução real da equação de Wheeler-DeWitt produz uma estrutura que é uma idealização do limite de gravitação forte da TRG. Este tipo de geometria, que é degenerada, já tem sido estudada [69]. Como esta situação é bem geral (é válida para qualquer solução real da equação de Wheeler-DeWitt, que é real), ela merece maior atenção. Pode ser que estas 4-geometrias degeneradas sejam a correta descrição da geometrodinâmica quântica do universo primordial. Também seria interessante investigar se essas estruturas tem um limite clássico produzindo a 4-geometria usual da cosmologia clássica.

Para potenciais quânticos não locais, mostramos que a evolução quântica resulta

também consistente quando as trajetórias são restritas às trajetórias bohmianas satisfazendo as relações guia (5.6) e (5.7). Este é um ponto que não foi tomado com a devida atenção na literatura.

Seria interessante também, examinar a ligação entre o limite clássico e as condições para inflação e/ou homogeneidade e isotopia no universo. Por exemplo, omitindo o campo escalar, o limite clássico dos exemplos estudados no cap.6 nas seções 6.1.2, 6.2.1 e 6.2.2 implica que a hipersuperfície clássica inicial deva ter uma curvatura escalar constante, o que é mais próximo de uma hipersuperfície inicial maximalmente simétrica.

Como já foi discutido, na interpretação de Bohm-de Broglie é possível examinar qual tipo de estrutura é formada na geometrodinâmica quântica utilizando a relação dos colchetes de Poisson (5.25), e as relações guia (5.9) e (5.10). Assumindo a existência de 3-geometrias, configurações de campo, e os respectivos momentos, independentemente de quaisquer observações, a interpretação de Bohm-de Broglie permite-nos utilizar ferramentas clássicas, como o formalismo hamiltoniano, para entender a estrutura da geometria quântica. Se esta informação resulta de alguma utilidade, não sabemos. Já na experiência das duas fendas na mecânica quântica não relativística, a interpretação de Bohm-de Broglie permite dizer por qual fenda passou a partícula: se ela chega à metade superior da tela então veio da fenda superior, e vice-versa. A interpretação de vários mundos não dá esta informação. Mas esta informação não tem utilidade: não podemos verificá-la nem utilizá-la em outros experimentos. A situação pode ser análoga na cosmologia quântica canônica. A interpretação de Bohm-de Broglie produz muita informação sobre a geometrodinâmica quântica que não pode ser obtida da interpretação de vários mundos,



mas esta informação pode ser inútil. De qualquer modo, apenas com mais investigação poderemos responder a esta questão, as ferramentas estão a disposição.

Gostaríamos de ressaltar que estes resultados foram obtidos sem que tenhamos assumido nenhum ordenamento nem regularização particular da equação de Wheeler-DeWitt. Além disso, não utilizamos nenhuma interpretação probabilística das soluções. Portanto são resultados completamente gerais. Porém, gostaríamos de comentar alguns pontos sobre o problema da probabilidade em cosmologia quântica. A equação de Wheeler-DeWitt para universos fechados não produz nenhuma interpretação probabilística para suas soluções por causa de sua natureza hiperbólica. Mas, foi sugerido em várias oportunidades [21, 70, 71, 72, 52] que no regime semiclássico é possível construir uma medida de probabilidade com as soluções da equação de Wheeler-DeWitt. Então, no caso de interpretações onde as probabilidades são essenciais, o problema de encontrar um espaço de Hilbert para as soluções da equação de Wheeler-DeWitt resulta crucial se alguém deseja obter alguma informação acerca do regime puramente quântico. Claro que as probabilidades são também úteis na interpretação de Bohm-de Broglie. Quando integramos as relações guia (5.9) e (5.10), as condições iniciais são arbitrárias, e seria bom ter alguma distribuição de probabilidade das mesmas. Mas, como foi visto e discutido nesta tese, podemos extrair uma grande quantidade de informação do regime de gravitação quântica sem aproximação semi-clássica utilizando a interpretação de Bohm-de Broglie, sem ter que recorrer a nenhuma noção de probabilidade. Nesta interpretação, as probabilidades não são essenciais.

Seria também muito importante examinar a interpretação de Bohm-de Broglie para

outros sistemas gravitacionais, como buracos negros. Já foram feitos estudos neste sentido mas para modelos com simetria esférica no vazio [73], onde temos um número finito de graus de liberdade. Seria interessante estudar modelos mais gerais. Porém estes casos são qualitativamente diferentes dos modelos cosmológicos-quânticos fechados. Não há problema pensar que existam observadores fora de um conjunto de buracos negros. É mecânica quântica de um sistema aberto, que tem menos problemas conceituais de interpretação.

As conclusões desta tese estão, claro, limitadas por várias suposições fortes que fizemos tacitamente, a saber, que existem 3-geometrias contínuas no regime quântico (os efeitos quânticos poderiam destruí-las também) ou a validade do processo de quantização usual da TRG, sem considerar outros formalismos como, por exemplo, a Teoria de Cordas. Não obstante, ainda que nosso formalismo não fosse o apropriado, é impressionante verificar até onde se pode chegar com a interpretação de Bohm-de Broglie, mesmo no presente estado incompleto da gravitação quântica canônica. Provavelmente deve ser difícil, ou tal vez impossível, chegar às conclusões detalhadas que apresentamos nesta tese usando outras interpretações.

Por outro lado, se esta imagem mais fina da interpretação de Bohm-de Broglie da cosmologia quântica puder fornecer informação útil na forma de efeitos observáveis, então teremos uma forma de decidir entre interpretações, algo que será com certeza muito importante não só para a cosmologia quântica como também para a própria teoria quântica.

# Apêndice A

## Cálculo de $\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\}$ no caso da teoria de campos parametrizada

Apresentamos aqui o cálculo de  $\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\}$  no caso da teoria de campos parametrizada.

O super-hamiltoniano é dado por (3.34)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\nu}(\Pi_\alpha \nu^\alpha + \frac{1}{2}\pi_\phi^2 + \frac{1}{2}\nu^2(h^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + U(\phi))), \quad (\text{A.1})$$

que escrevemos, para simplificar, como

$$\mathcal{H} = \nu^{-1}\mathbb{H}, \quad (\text{A.2})$$

onde definimos

$$\mathbb{H} \equiv \Pi_\alpha \nu^\alpha + \frac{1}{2}\pi_\phi^2 + \frac{1}{2}\nu^2(h^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + U(\phi)). \quad (\text{A.3})$$

Então temos

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} &= \frac{1}{\nu(x)}\frac{1}{\nu(y)}\{\mathbb{H}(x), \mathbb{H}(y)\} + \frac{1}{\nu(x)}\mathbb{H}(y)\{\mathbb{H}(x), \frac{1}{\nu(y)}\} + \\ &\quad \frac{1}{\nu(y)}\mathbb{H}(x)\{\frac{1}{\nu(x)}, \mathbb{H}(y)\}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Utilizando o fato de que  $\frac{\delta \nu_\alpha(x)}{\delta X^\beta(y)} = -\frac{\delta \nu_\beta(x)}{\delta X^\alpha(y)}$ , que vem de (3.36), e as propriedades básicas da  $\delta(x, y)$ , é possível ver que cada um dos últimos dois parênteses do lado direito desta

equação se anulam idênticamente. Usando este mesmo argumento e o fato de que o potencial  $U(\phi)$  não contem derivadas da métrica, a última equação fica:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} = & -\frac{1}{\nu^2(y)} \Pi_\beta(y) \nu^\alpha(y) \frac{\partial \nu^\beta(y)}{\partial X_i^\alpha(x)} \frac{\partial}{\partial y^i} \delta(y, x) \\ & + \frac{1}{\nu^2(x)} \Pi_\alpha(x) \nu^\beta(x) \frac{\partial \nu^\alpha(x)}{\partial X_i^\beta(y)} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(x, y) - \\ & h^{ij}(y) \Pi_\phi(y) \frac{\partial \phi}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \delta(y, x) + h^{ij}(x) \Pi_\phi(x) \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(x, y). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Finalmente é possível provar que o primeiro termo do lado direito é igual a

$$-h^{ij}(y) \Pi_\alpha(y) \frac{\partial X^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \delta(y, x) \quad (\text{A.6})$$

e o segundo é igual a

$$+h^{ij}(x) \Pi_\alpha(x) \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(x, y) \quad (\text{A.7})$$

onde novamente usamos a Eq. (3.36). Então temos

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} = & h^{ij}(x) \left( \Pi_\alpha(x) \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^j} + \Pi_\phi(x) \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(x, y) \\ & - h^{ij}(y) \left( \Pi_\alpha(y) \frac{\partial X^\alpha}{\partial y^j} + \Pi_\phi(y) \frac{\partial \phi}{\partial y^j} \right) \frac{\partial}{\partial y^i} \delta(y, x), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

isto é,

$$\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} = \mathcal{H}^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(x, y) - \mathcal{H}^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i} \delta(y, x). \quad (\text{A.9})$$

## Apêndice B

### A quebra da invariância de Lorentz

Aqui vamos estudar um exemplo onde a invariância de Lorentz é quebrada a nível de eventos individuais, segundo a interpretação de Bohm-de Broglie da teoria de campos em espaço-tempo plano, estudada no capítulo 3. Para mostrar isto vamos primeiramente desparametrizar a teoria, isto é, voltar às coordenadas de Minkowski. Partimos da Eq.(3.43)

$$\frac{1}{\nu} \left( -i\hbar\nu^\alpha \frac{\delta\Psi}{\delta X^\alpha(x)} - (\hbar)^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2\Psi}{\delta\phi(x)^2} + \frac{1}{2}\nu^2(h^{ij}(x)\phi(x)_{,i}\phi(x)_{,j} + U(\phi(x)))\Psi \right) = 0. \quad (\text{B.1})$$

A funcional  $\Psi$  não depende do rotulamento da hipersuperfície, já que, como foi visto, é invariante perante transformações espaciais de coordenadas. Então podemos escolher as coordenadas  $x$  na hipersuperfície como sendo as de Minkowski  $x^i = X^i$ . As hipersuperfícies serão descritas em forma desparametrizada por  $X^0 = X^0(X^i)$  e o funcional de onda  $\Psi(\phi(X), X^\alpha)$  se escreve  $\Psi = \Psi(\phi(X), X^0(X^i))$ . Podemos escolher uma família de hipersuperfícies plana uniparamétrica, de modo que  $X^0(X^i) = T$  com  $-\infty < T < \infty$  e  $\frac{\partial T}{\partial X^i} = 0$ . O funcional  $\Psi = \Psi(\phi(X), X^0(X^i))$  sob esta família de hipersuperfícies é agora um funcional de  $\phi(X)$  que depende de  $T$  como um parâmetro  $\Psi = \Psi(\phi(X), T)$ . Temos

então para a derivada temporal

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial T} &= \int d^3 X \frac{\delta \Psi}{\delta X^0(X)} \frac{\partial X^0(X)}{\partial T} \\ &= \int d^3 X \frac{\delta \Psi}{\delta X^0(X)}\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

Com estas definições,  $\nu_\alpha$ , dado na Eq. (3.36), tem componentes  $\nu_0 = -1, \nu_i = 0$ . ( $\nu^0 = 1$ ). Substituindo tudo isto na equação (B.1) temos:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\phi, t)}{\partial T} = \int d^3 X \frac{1}{2} \left[ -\hbar^2 \frac{\delta^2}{\delta \phi^2} + (\nabla \phi)^2 + U(\phi) \right] \Psi(\phi, T), \quad (\text{B.3})$$

que é a equação funcional de Schrödinger para o campo escalar  $\phi$  no potencial  $U(\phi)$ . Esta equação tem problemas de regularização, já que o operador de derivação funcional está aplicado no mesmo ponto. Acima ela está escrita em forma não regularizada. Ela deve, portanto, ser regularizada e em seguida ser escolhido um ordenamento que deixe a teoria livre de anomalias. As soluções desta equação regularizada serão interpretadas segundo Bohm-de Broglie. Escrevendo o funcional de onda na forma polar  $\Psi = A \exp(iS/\hbar)$ , e substituindo na Eq. (B.3), obtemos:

$$\frac{\partial S}{\partial T} + \frac{1}{2} \int d^3 X \left[ \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right)^2 + (\nabla \phi)^2 + U(\phi) \right] + Q(\phi, T) = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \int d^3 X \frac{\delta}{\delta \phi} \left( A^2 \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) = 0, \quad (\text{B.5})$$

onde

$$Q(\phi) = -\hbar^2 \frac{1}{2A} \int d^3 X \frac{\delta^2 A}{\delta \phi^2}, \quad (\text{B.6})$$

é o correspondente potencial quântico, que depende da regularização e ordenamento escolhido na (B.3). Acima ele está escrito em forma não regularizada. A primeira equação Eq.(B.4) é interpretada como uma equação de Hamilton-Jacobi que governa a evolução de certa configuração inicial do campo no tempo, a qual vai ser diferente da clássica devido a presença do potencial quântico. A Eq. (B.5) é uma lei de conservação que justifica a suposição de que, a tempo  $T$ ,  $A^2 D\phi$  é a probabilidade de que o campo  $\phi$  esteja num elemento de ‘volume’  $D\phi$  ao redor da configuração  $\phi(X)$  para todo  $X$ . A notação  $D\phi$  significa o produto infinito  $\prod_X d\phi$  dos elementos de volume do campo  $d\phi$  para cada valor de  $X$ . O funcional pode-se supor normalizado:

$$\int |\Psi|^2 D\phi = 1 \quad (\text{B.7})$$

A evolução quântica pode ser obtida integrando-se a relação guia de Bohm, dada agora por

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \phi}{\partial T} = \frac{\delta S[\phi(X), T]}{\delta \phi(X)} \Big|_{\phi(X)=\phi(X,T)} \quad (\text{B.8})$$

uma vez dada a configuração inicial  $\phi_0(X)$ . A equação de movimento da coordenada  $\phi$  pode se obtida tomando a derivada funcional da equação de Hamilton-Jacobi modificada (B.4). Temos

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi(X)} \right) + \frac{1}{2} \int d^3 Y \left[ 2 \frac{\delta S}{\delta \phi(Y)} \frac{\delta}{\delta \phi(X)} \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \right) + 2(\nabla \phi) \frac{\delta(\nabla \phi(Y))}{\delta \phi(X)} + \frac{\delta U(\phi)}{\delta \phi(X)} \right] + \frac{\delta Q(\phi, T)}{\delta \phi(X)} = 0, \quad (\text{B.9})$$

e usando que  $\frac{\partial \phi}{\partial T} = \frac{\delta S[\phi(X), T]}{\delta \phi(X)}$  e denotando  $\dot{\phi} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial T}$  segue que

$$\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial T} + \int d^3 Y \dot{\phi}(Y) \frac{\delta \dot{\phi}(Y)}{\delta \phi(X)} + \int d^3 Y \nabla \phi \cdot \nabla \delta(X, Y) + \frac{1}{2} \int d^3 Y \frac{\delta U(\phi)}{\delta \phi(X)} + \frac{\delta Q(\phi, T)}{\delta \phi(X)} = 0 \quad (\text{B.10})$$

O segundo termo do lado esquerdo é nulo já que  $\frac{\delta \dot{\phi}}{\delta \phi} = \frac{\delta \Pi_\phi}{\delta \phi} = 0$ , então, integrando por partes e desprezando um termo de fronteira

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} - \nabla^2 \phi + \frac{1}{2} \int d^3 Y \frac{\delta U(\phi)}{\delta \phi(X)} + \frac{\delta Q(\phi, T)}{\delta \phi(X)} = 0, \quad (\text{B.11})$$

que podemos escrever

$$\square \phi(X, T) + \frac{1}{2} \int d^3 Y \frac{\delta U(\phi)}{\delta \phi(X)} = - \frac{\delta Q[\phi(X), T]}{\delta \phi(X)} \Big|_{\phi(X)=\phi(X, T)}. \quad (\text{B.12})$$

onde  $\square \equiv -\partial_\mu \partial^\mu$ . No caso de um campo escalar livre temos  $U(\phi) = m^2 \phi^2$ , e esta última equação se reduz a

$$\square \phi(X, T) + m^2 \phi(X, T) = - \frac{\delta Q[\phi(X), T]}{\delta \phi(X)} \Big|_{\phi(X)=\phi(X, T)} \quad (\text{B.13})$$

Esta equação, é a versão quântica da equação de onda clássica:

$$\square \phi(X, T) + m^2 \phi(X, T) = 0. \quad (\text{B.14})$$

A "força quântica" que aparece no lado direito de (B.12) é responsável por todos os efeitos quânticos da teoria.



Vamos mostrar que já o estado de vácuo do campo escalar livre produz um potencial quântico que quebra a invariância Lorentz dos campos. A solução para o estado de vácuo da equação (B.3) no caso livre, está dada por ([74] cap. 10):

$$\Psi_0[\phi, T] = e^{-\frac{iE_0 T}{\hbar}} \eta e^{-\int d^3 X d^3 Y \phi(X) g(X, Y) \phi(Y)} \quad (\text{B.15})$$

onde

$$g(X, Y) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_k e^{ik \cdot (X - Y)} \quad (\text{B.16})$$

e  $\omega_k = \hbar \sqrt{k^2 + m^2}$

Calculando a amplitude de (B.15) e usando (B.6), o potencial quântico fica

$$Q = -\frac{1}{2} \int d^3 X \left( \int d^3 Y \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \omega_k \cos\{k \cdot (X - Y)\} \phi(Y) \right)^2 + \frac{1}{2} \int d^3 X \int d^3 k \omega_k. \quad (\text{B.17})$$

O ultimo termo é a energia do vácuo. Derivando funcionalmente esta expressão com respeito a  $\phi$ , tendo em conta que a energia do vácuo não depende funcionalmente de  $\phi$  e usando que ([74] cap.10)

$$\int d^3 X g(Z, X) g(X, Y) = \frac{1}{4} (-\nabla^2 + m^2) \delta(Z, Y), \quad (\text{B.18})$$

segue que

$$\frac{\delta Q}{\delta \phi(X)} = -(-\nabla^2 + m^2) \phi(X) \quad (\text{B.19})$$

Substituindo na equação do campo  $\phi$  (B.13) temos

$$\square\phi(X, T) + m^2\phi(X, T) = (-\nabla^2 + m^2)\phi(X)|_{\phi(X)=\phi(X, T)} \quad (\text{B.20})$$

a qual não é uma equação invariante de Lorentz.

## Apêndice C

# Potencial quântico não local para um espaço-tempo esfericamente simétrico

Apresentamos a seguir o exemplo de um potencial quântico não local do tipo estudado nos cenários cosmológicos no cap.6. Se trata de um modelo de midi-superespaço esfericamente simétrico com um campo eletromagnético. Escolhemos um certo ordenamento na equação de Wheeler-DeWitt, que não está regularizada, só para ter uma solução exata já conhecida na literatura<sup>1</sup>.

Começemos com a descomposição ADM (Arnowit-Deser-Misner) sob a variedade  $R \times R \times S^2$  da métrica de um espaço-tempo esfericamente simétrico com um campo eletromagnético:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \Lambda^2 (dr + N^r dt)^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (\text{C.1})$$

onde  $N$ ,  $N^r$  são as funções lapso e deslocamento, respectivamente, ambas dependendo de

---

<sup>1</sup>De fato, o modelo estudado aqui pode se reduzir a um mini-superespaço, com um número finito de graus de liberdade[75]. Não obstante, nosso objetivo neste apêndice é mostrar que não é muito difícil que um potencial do tipo estudado no cap. 5 e que quebra a álgebra de Dirac, apareça em cosmologia quântica canônica. Eles podem ser obtidos, por exemplo, em equações de Wheeler-DeWitt com simetria esférica, como iremos ver.

$r$  e  $t$ ), e  $d\Omega$  indica o elemento de linha sobre  $S^2$ . O potencial eletromagnético está descrito pela 1-forma esfericamente simétrica:

$$dA = \Gamma(r, t)dr + \Phi(r, t)dt. \quad (\text{C.2})$$

A ação ADM no midisuperespaço, depois de integrar sobre a 2-esfera, fica ( $c \equiv 1$ )

$$\begin{aligned} S = \int dt \int dr \frac{1}{2N} \left\{ \frac{1}{G} \left[ N^2 \Lambda - \Lambda \dot{R}^2 + 2 \frac{N^2 R \Lambda' R'}{\Lambda^2} - 2 \frac{N^2 R R''}{\Lambda} - \right. \right. \\ \left. \Lambda (N^r)^2 R'^2 + 2 N^r \dot{R} (\Lambda R)' - 2 R N^r R' (\Lambda N^r)' + 2 R \Lambda (N^r)' \dot{R} \right. \\ \left. + 2 R N^r \dot{\Lambda} R' - 2 R \dot{\Lambda} \dot{R} - N^2 \frac{R'^2}{\Lambda} \right] + \frac{R^2}{\Lambda} (\dot{\Gamma} - \Phi')^2 \right\}, \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

onde a linha indica a derivada com respeito a  $r$ . Variando a ação com relação a  $N$  e  $N^r$  obtemos os vínculos super-hamiltoniano e super-momento [75, 76]

$$\mathcal{H} \equiv \frac{G}{2} \frac{\Lambda P_\Lambda^2}{R^2} - G \frac{P_\Lambda P_R}{R} + \frac{V_g}{G} + \frac{\Lambda P_\Gamma^2}{2R^2} \approx 0, \quad (\text{C.4})$$

e

$$\mathcal{H}_r \equiv P_R R' - \Lambda P'_\Lambda \approx 0, \quad (\text{C.5})$$

onde

$$\frac{V_g}{G} = \frac{R R''}{\Lambda} - \frac{R R' \Lambda'}{\Lambda^2} + \frac{R'^2}{2\Lambda} - \frac{\Lambda}{2} \quad (\text{C.6})$$

Variar a ação com relação ao multiplicador de Lagrange  $\phi$  conduz a

$$P'_\Gamma \approx 0. \quad (\text{C.7})$$

Assumimos condições de contorno para todos os campos de modo que todas as integrais resultem bem definidas, e de maneira que a métrica do espaço-tempo clássico seja não-degenerada [76].

Quantizaremos segundo o formalismo de Dirac. Todos os vínculos atuam sobre funcionais  $\Psi[\Lambda(r), R(r), \Gamma(r)]$ . O vínculo eletromagnético (C.7) é resolvido [77] por  $\Psi = f(\int_\infty^\infty \Gamma dr) \psi[\Lambda(r), R(r)]$  onde  $f$  é uma função diferenciável. Do vínculo super-hamiltoniano, obtemos a equação de Wheeler-DeWitt que, escrita com um certo ordenamento, fica:

$$\left( -\frac{G\hbar^2\Lambda}{2R^2} F \frac{\delta}{\delta\Lambda} F^{-1} \frac{\delta}{\delta\Lambda} + \frac{G\hbar^2}{R} F \frac{\delta}{\delta R} F^{-1} \frac{\delta}{\delta\Lambda} + \frac{V_g}{G} - \frac{\hbar^2\Lambda\delta^2}{2R^2\delta\Gamma^2} \right) \Psi = 0 \quad (\text{C.8})$$

onde

$$F \equiv R \sqrt{\left(\frac{R'}{\Lambda}\right)^2 + \frac{2m}{R} - \frac{q^2}{R^2} - 1} \quad (\text{C.9})$$

Nossa solução tem a forma [77]

$$\Psi = e^{\frac{iq}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty \Gamma dr} \psi[\Lambda(r), R(r)], \quad (\text{C.10})$$

onde foram separados os graus de liberdade eletromagnéticos e gravitacionais, e  $\psi$  verifica uma equação de Wheeler-DeWitt reduzida

$$\left( -\frac{G\hbar^2\Lambda}{2R^2} F \frac{\delta}{\delta\Lambda} F^{-1} \frac{\delta}{\delta\Lambda} + \frac{G\hbar^2}{R} F \frac{\delta}{\delta R} F^{-1} \frac{\delta}{\delta\Lambda} + \frac{V_g}{G} + \frac{\Lambda q^2}{2R^2} \right) \psi = 0. \quad (\text{C.11})$$

Escolhemos este ordenamento particular pois neste caso é conhecida na literatura uma solução exata [77], a saber

$$\psi_e = \exp \frac{iS_0}{\hbar}, \quad (\text{C.12})$$

onde

$$S_0 = G^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dr \left\{ \Lambda F - \frac{1}{2} R R' \ln \frac{\frac{R'}{\Lambda} + \frac{F}{R}}{\frac{R'}{\Lambda} - \frac{F}{R}} \right\} \quad (\text{C.13})$$

É simples verificar que, sendo a equação de Wheeler-DeWitt real, então o complexo conjugado do funcional (C.12) também é uma outra solução exata. Por tanto, temos duas soluções exatas independentes desta equação e, por causa da sua linearidade, qualquer superposição linear será uma outra solução:

$$\psi = a \exp \left( \frac{iS_0}{\hbar} \right) + b \exp \left( \frac{-iS_0}{\hbar} \right). \quad (\text{C.14})$$

Escrevendo-a em forma polar

$$\psi = A \exp \frac{iS}{\hbar}, \quad (\text{C.15})$$

e substituindo-a na equação de Wheeler-DeWitt (C.11), obtemos duas equações. Uma delas é

$$\frac{G\Lambda}{2R^2} \left( \frac{\delta S}{\delta \Lambda} \right)^2 - \frac{G}{R} \frac{\delta S}{\delta \Lambda} \frac{\delta S}{\delta R} + V + \mathcal{Q} = 0, \quad (\text{C.16})$$

onde  $V$  indica o potencial clássico

$$V \equiv \frac{V_g}{G} + \frac{\Lambda q^2}{2R^2}, \quad (\text{C.17})$$

e  $\mathcal{Q}$  é o potencial quântico

$$\mathcal{Q} = \frac{G\hbar^2}{AR} \left( -\frac{\Lambda\delta^2 A}{2R\delta\Lambda^2} + \frac{\delta^2 A}{\delta R\delta\Lambda} + \left( -\frac{1}{F} \frac{\delta F}{\delta R} + \frac{\Lambda}{2RF} \frac{\delta F}{\delta\Lambda} \right) \frac{\delta A}{\delta\Lambda} \right). \quad (\text{C.18})$$

Para o funcional (C.14), o potencial quântico (C.18) é

$$\mathcal{Q} = \gamma V, \quad (\text{C.19})$$

onde  $V$  é o potencial clássico, e o fator  $\gamma$  é dado por

$$\gamma = -4 \left\{ \left( \frac{ab}{A^2} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{2S_0}{\hbar} \right) + \frac{ab}{A^2} \cos \left( \frac{2S_0}{\hbar} \right) \right\}. \quad (\text{C.20})$$

Já que a fase  $S$  do funcional vem dado em termos de  $S_0$  por  $S = \frac{\hbar}{2i} \ln(\frac{\psi}{\psi^*})$ , onde a  $\psi$  é uma função de  $S_0$ , então

$$\gamma = \gamma(S). \quad (\text{C.21})$$

Portanto temos um exemplo concreto de um potencial quântico não local do tipo estudado no capítulo 5. A álgebra dos vínculos não é a de Dirac mas fecha com diferentes ‘constantes de estrutura’, quebrando a 4-geometria do espaço tempo. As hipersuperfícies evoluem com o hamiltoniano quântico de Bohm-de Broglie consistentemente, mas a estrutura gerada nessa evolução não é uma 4-geometria Riemanniana e por tanto a causalidade Einsteniana

vai ser modificada de acordo com a nova álgebra dos vínculos. Explicitamente, temos que o parênteses de Poisson para o super-hamiltoniano quântico é dado por:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_Q, \bar{\mathcal{H}}_Q\} = (1 + \gamma)\{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}\} - 2\frac{\delta\gamma}{\delta S}\frac{\bar{V}_G}{G}\mathcal{H}_Q + \frac{\delta\gamma}{\delta S}\frac{\bar{V}_G}{G}\left(\frac{G\Lambda}{R^2}P_\Lambda\phi_\Lambda - \frac{G}{R}P_\Lambda\phi_R - \frac{G}{R}P_R\phi_\Lambda\right) \\ + 2\frac{\delta\gamma}{\delta S}\frac{V_G}{G}\bar{\mathcal{H}}_Q + \frac{\delta\gamma}{\delta S}\frac{V_G}{G}\left(\frac{\bar{G}}{\bar{\Lambda}}\bar{R}^2\bar{P}_\Lambda\bar{\phi}_\Lambda - \frac{\bar{G}}{\bar{R}}\bar{P}_\Lambda\bar{\phi}_R - \frac{\bar{G}}{\bar{R}}\bar{P}_R\bar{\phi}_\Lambda\right), \end{aligned}$$

que está de acordo com (6.7). Aqui usamos a barra para denotar as quantidades no ponto  $r'$ , por ex.  $\bar{\mathcal{H}}_Q \equiv \mathcal{H}_Q(r')$ ,  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(r)$  etc. Vemos que o lado direito desta última equação é fracamente zero por causa do vínculo super-hamiltoniano quântico  $\mathcal{H}_Q \approx 0$ , das relações de Bohm  $\phi_\Lambda \approx 0, \phi_R \approx 0$  e do vínculo super-momento, já que para os parênteses de Poisson que aparecem no primeiro termo da soma é

$$\{\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}\} = \mathcal{H}^r \frac{\partial}{\partial r} \delta(r - r') - \bar{\mathcal{H}}^r \frac{\partial}{\partial r'} \delta(r' - r) \approx 0. \quad (\text{C.22})$$



# Referências

- [1] Niels Bohr, **Atomic Physics and Human Knowledge** (Science Editions, New York, 1961); Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, Phys. Rev. **48**, 696 (1935).
- [2] Werner Heisenberg, **The Physical Principles of the Quantum Theory** (Dover, New York, 1949).
- [3] John von Neumann, **Mathematical Foundations of Quantum Mechanics** (Princeton University Press, Princeton, 1955).
- [4] Roland Omnès, **The Interpretation of Quantum Mechanics** (Princeton University Press, Princeton, 1994).
- [5] H. D. Zeh, Found. Phys. **1**, 69 (1970); E. Joos and H. D. Zeh, *The emergence of classical properties through interaction with the environment*, Z. Phys. **B59**, 223 (1985); W. H. Zurek, *Environment induced superselection rules*, Phys. Rev. **D26**, 1862 (1982); W. H. Zurek, *Decoherence and the transition from quantum to classical*, Phys. Today **44**, 36 (1991).
- [6] C. Kiefer, *Interpretation of the decoherence functional in quantum gravity*, Class. Quantum Grav. **8**, 379 (1991); D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I. O.

- Stamatescu and H. D. Zeh, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [7] John Bell, *Against Measurement*, Physics World, 33 (1990).
- [8] H. D. Zeh, *The program of decoherence: ideas and concepts* em **Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory** ed. D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I. O. Stamatescu and H. D. Zeh (Springer-Verlag, Berlin, 1996) (quant-ph/9506020 ).
- [9] M. Gell-Mann and J. B. Hartle, *Quantum mechanics in the light of quantum cosmology* em **Complexity, Entropy and the Physics of Information**, ed. W. H. Zurek (Addison Wesley, 1990).
- [10] J. P. Paz and W. H. Zurek, *Environment induced decoherence, classicality and consistency of quantum histories*, Phys. Rev. **D 48**, 2728 (1993); V.F Mukhanov, *Time asymmetry and interpretation of quantum theory* em **Physical Origins of Time Asymmetry**, ed. J. J. Halliwell, J. Pérez-Mercader and W. H. Zurek (Cambridge University Press, 1994).
- [11] G.C. Ghirardi, A. Rimini and T. Weber, *A unified dynamics for micro and macro systems* , Phys. Rev. **D 34** 470 (1986); G.C. Ghirardi , P. Pearle and A. Rimini, *Markov processes in Hilbert spaces and continuous spontaneous localization of systems of identical particles*, Phys. Rev.**A 42**, 78 (1990).

- [12] Roger Penrose, in **Quantum Implications: Essays in Honour of David Bohm**, ed. B. J. Hiley and F. David Peat (Routledge, London, 1987).
- [13] B. S. DeWitt and N. Graham (ed.) **The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics**, (Princeton University Press, Princeton, 1973).
- [14] David Bohm, *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables I e II*, Phys. Rev. **85**, 166 (1952) e Phys. Rev. **85**, 180 (1952).
- [15] D. Bohm, B. J. Hiley and P. N. Kaloyerou, *An ontological basis for the Quantum Theory*, Phys. Rep. **144**, 349 (1987).
- [16] P. R. Holland, **The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics** (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [17] J. C. Vink, *Quantum potential interpretation of the wave function of the universe*, Nucl. Phys. **B369**, 707 (1992).
- [18] Y. V. Shtanov, *On Pilot Wave Quantum Cosmology*, Phys. Rev. **D54**, 2564 (1996).
- [19] A. Valentini, *Signal-locality, uncertainty and the subquantum H-theorem II*, Phys. Lett. **A158**, 1, (1991).
- [20] J. A. de Barros and N. Pinto-Neto, *The causal interpretation of quantum mechanics and the singularity and time issue in quantum cosmology*, Int. J. of Mod. Phys. **D7**, 201 (1998).

- [21] J. Kowalski-Glikman and J. C. Vink, *Gravity-matter mini-superspace: quantum regime, classical regime and in between*, Class. Quantum Grav. **7**, 901 (1990).
- [22] E. J. Squires, *A quantum solution to a cosmological mystery*, Phys. Lett. **A162**, 35 (1992).
- [23] J. A. de Barros, N. Pinto-Neto and M. A. Sagioro-Leal, *The causal interpretation of dust and radiation fluids nonsingular quantum cosmologies*, Phys. Lett. **A241**, 229 (1998).
- [24] R. Colistete Jr., J. C. Fabris and N. Pinto-Neto, *Singularities and classical limit in quantum cosmology with scalar fields*, Phys. Rev. **D57**, 4707 (1998) (gr-qc/9711047).
- [25] S. A. Hojman, K. Kuchař and C. Teitelboim, *Geometrodynamics Regained* Ann. Phys. **96**, 88 (1976).
- [26] N. Pinto-Neto and E. Sergio Santini, *Must quantum spacetimes be Euclidean?*, Phys.Rev. D **59** 123517 (1999).(gr-qc/9811067)
- [27] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure **40**, 325 (1923) ;*Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (suite)* **41**, 1 (1924).
- [28] N. C. Tsamis and R. P. Woodward, *The factor ordering must be regulated*, Phys. Rev. **D36**, 3641 (1987).

- [29] K. Maeda and M. Sakamoto, *Strong coupling quantum gravity and physics beyond the Planck scale*, Phys. Rev. **D54**, 1500 (1996) (hep-th/9604150 ).
- [30] T. Horiguchi, K. Maeda and M. Sakamoto, *Analysis of the Wheeler-DeWitt equation beyond the Planck scale and dimensional reduction*, Phys. Lett. **B344**, 105 (1995) (hep-th/9409152).
- [31] J. Kowalski-Glikman and K. A. Meissner, *A class of exact solutions of the Wheeler-DeWitt equation*, Phys. Lett. **B376**, 48 (1996) ( hep-th/9601062).
- [32] J. M. Lévy Leblond, *Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré*, Ann. Inst. Henri Poincaré **III**, 1 (1965).
- [33] S. Schweber, *QED and the men who made it: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*, (Princeton University Press, Princeton, 1994).
- [34] D. Bohm and J. P. Vigier, *Model of the causal interpretation of Quantum Theory in terms of a fluid with irregular fluctuations*, Phys. Rev. **96**, 208 (1954).
- [35] A. Valentini, *Signal-locality , uncertainty and the subquantum H-theorem.* I Phys. Lett. **A156**, 5 (1991).
- [36] P. N. Kaloyerou, *The causal interpretation of the electromagnetic field*, Phys. Rep. **244**, 287 (1994).
- [37] Karel Kuchař, *Canonical quantum gravity*, em **Relativity, Groups and Cosmology** ed. Werner Israel (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland 1973).

- [38] Cornelius Lanczos, **The Variational Principles of Mechanics** (Dover, New York)
- [39] Paul A.M. Dirac **Lectures on Quantum Mechanics** Yeshiva University (1964),  
Generalized hamiltonian dynamics, Can.J.Math.2:129-148,(1950)
- [40] Claudio Teitelboim, *How commutators of constraints reflect the space-time structure*,  
Ann. Phys. **80**, 542 (1973).
- [41] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, **The Large Scale Structure of Space Time**  
(Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [42] David Lovelock, Hanno Rund, *Tensors, Differential Forms and Variational Principles*, (Dover, New York, 1989)
- [43] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, **Euclidean Quantum Gravity** (World Scientific, London, 1993).
- [44] R. M. Wald; **General Relativity** (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [45] Bryce S.DeWitt, *Quantum theory of gravity I. The canonical theory*,  
Phys.Rev.**160**,1113(1967).
- [46] Nelson Pinto-Neto; *Quantum Cosmology*, em **Cosmology and Gravitation II**,  
Proceeding of the VIII Brazilian School of Cosmology and Gravitation, ed. Mário  
Novello (Editions Frontieres, 1996)
- [47] B. S. De Witt em **Gravitation: An Introduction to Current Research**, ed. L.  
Witten (Wiley, New York, 1962).

- [48] J.B. Hartle, S.W. Hawking, *Wave function of the Universe*, Phys. Rev. D **28**, 2960 (1983).
- [49] A. Vilenkin, *Quantum cosmology and the initial state of the universe*, Phys. Rev. D **37**, 888 (1988).
- [50] A. H. Guth, *The inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).
- [51] E. W. Kolb, M. S. Turner; **The Early Universe** (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1990).
- [52] J. Halliwell, *Introductory Lectures on Quantum Cosmology*, em **Quantum Cosmology and Baby Universes**, Jerusalem Winter School for Theoretical Physics, ed. B.Hartle et al.(World Scientific, Singapore 1990).
- [53] Nelson Pinto-Neto, **Formulação hamiltoniana da Teoria da Relatividade Geral**, Notas do curso no CBPF.
- [54] C. Kiefer, *Functional Schrödinger equation for scalar QED*, Phys. Rev. **D45**, 2044 (1992).
- [55] A. H. Guth and S.-Y. Pi, *The quantum mechanics of the scalar field in the new inflationary universe*, Phys. Rev. **D32**, 1899 (1985).
- [56] J. N. Islam, *The Schrödinger equation in quantum field theory*, Found. of Phys. **24**, 593 (1994).

- [57] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21**, 447 (1949).
- [58] S.W. Hawking em **An Einstein Centenary Survey**, ed. S.W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, 1979).
- [59] R. Arnowit, S. Deser, C. Misner, *The dynamics of general relativity*, em **Gravitation: An Introduction to Current Research** ed. L.Witten (Wiley, New York, 1962).
- [60] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler; **Gravitation** (W. H. Freeman and Company, New York, 1973).
- [61] S. W. Hawking em **Euclidean Quantum Gravity**, ed. by G. W. Gibbons and S. W. Hawking (World Scientific, London, 1993).
- [62] T. Regge and C. Teitelboim, *Role of surface integrals in the hamiltonian formulation of general relativity*, Ann. Phys. **88**, 286 (1974).
- [63] Kurt Sundermeyer, **Constrained Dynamics** (Springer-Verlag, Berlin, 1982).
- [64] M.E.V. Costa, H.O. Girotti and T.J.M. Simões, *Dynamics of gauge systems and Dirac's conjecture*, Phys. Rev. **D32** Num. 2, 405 (1985).
- [65] John A. Wheeler, *Superspace and the nature of quantum geometrodynamics*, em **Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematical Physics**, ed. B. DeWitt and J.A.Wheeler (Benjamin New York, 1968).



- [66] John A. Wheeler, *On the nature of quantum geometrodynamics*, Ann. Phys. **2**, 604 (1957); J. A. Wheeler, *Geometrodynamics and the issue of the final state*, em **Relativity, Groups and Topology**, ed. by B. DeWitt and C. DeWitt (Gordon and Breach, New York, 1964); G.M Patton and J.A Wheeler, *Is Physics legislated by cosmogony*, em **Quantum Gravity. An Oxford Symposium**, ed. C.J. Isham, R.Penrose and D. Sciama (Clarendon Press, Oxford, 1975).
- [67] Claudio Teitelboim, *Quantum mechanics of the gravitational field*, Phys. Rev. D **25** 3159 (1982).
- [68] M. Henneaux, M. Pilati and C. Teitelboim, *Explicit solution for the zero signature (strong-coupling) limit of the propagation amplitude in quantum gravity*, Phys. Lett.**110 B** 123 (1982).
- [69] G. Dautcourt, *On the ultrarelativistic limit of General Relativity*, Acta Phys. Pol. B **29**, 1047 (1998) (gr-gc/9801093).
- [70] T. Banks, *TCP quantum gravity, the cosmological constant and all that*, Nucl. Phys. **B249**, 332 (1985).
- [71] T. P. Singh and T. Padmanabhan, *Notes on semiclassical gravity*, Ann. Phys. **196**, 296 (1989).
- [72] D. Giulini and C. Kiefer, *Consistency of semiclassical gravity*, Class. Quantum Grav. **12**, 403 (1995) (gr-qc/9409014 ).

- [73] M. Kenmoku, H. Kubotani, E. Takasugi and Y. Yamazaki, *de Broglie-Bohm interpretation for wave function of Reissner-Nordstrom-de Sitter black hole* (gr-qc/9810039).
- [74] Brian Hatfield **Quantum Field Theory of Point Particles and Strings** (Addison Wesley, 1992).
- [75] K. Kuchař, *Geometrodynamics of Schwarzschild black holes*, Phys. Rev. D **50**, 3961 (1994) (gr-qc/9403003).
- [76] J. Louko and S. N. Winters-Hilt, *Hamiltonian thermodynamics of the Reissner-Nordstrom anti-De Sitter black hole*, Phys. Rev. D **54**, 2647 (1996) (gr-qc/9602003).
- [77] T. Brotz and C. Kiefer, *Semiclassical black holes and entropy*, Phys. Rev. D **55**, 2186 (1997).